ELT 3832
DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

REDES COMPENSADORAS

Objetivo:

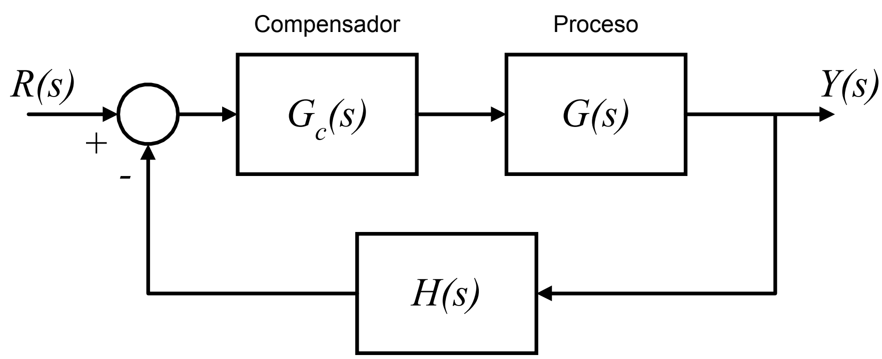
Aprender a diseñar un compensador (elegir la red adecuada y sus parámetros), para satisfacer requerimientos en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Se utiliza tanto la técnica de los diagramas de Bode, con el lugar geométrico de las raíces

CONTENIDO

1. Redes de compensación en cascada
2. Diseño en adelanto de fase (Bode)
3. Diseño en adelanto de fase (LGR)
4. Diseño en atraso de fase (Bode)
5. Diseño en atraso de fase (LGR)
6. Aplicaciones a procesos reales

1. Redes de compensación en cascada

Estructura básica:



$G_c(s)$ en cascada para proporcionar una $G_c(s)G(s)H(s)$ adecuada. En general:

$$G_c(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{N}(s+p_j)}$$

Problema: elección adecuada de los polos y ceros, para alterar el LGR o la respuesta en frecuencia

Compensador más simple: primer orden

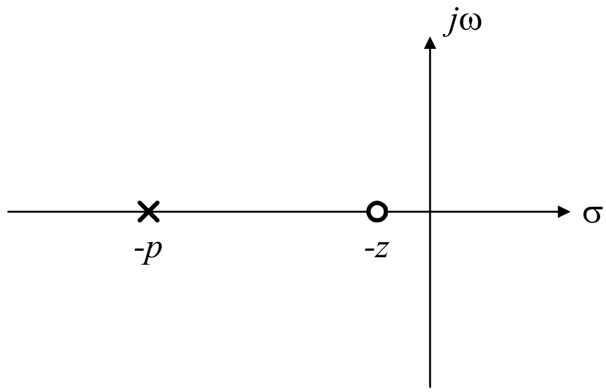
$$G_c(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p)}$$

Diseño: elección de z, p y K para un funcionamiento adecuado

- Si $|z| < |p|$: red de adelanto de fase
- Si $|z| > |p|$: red de atraso de fase

Red en adelanto de fase

Configuración de polos y ceros:



Si el polo fuera despreciable $|p| \gg |z|$, y el cero estuviera en el origen:

$$G_c(s) \cong \left(\frac{K}{p}\right)s$$

Red en adelanto: red tipo D. En frecuencia:

$$G_c(j\omega) = j\left(\frac{K}{p}\right)\omega = \left(\frac{K}{p}\,\omega\right)e^{+j90^\circ}$$

Angulo de adelanto de fase: $90°$

Respuesta en frecuencia de la red en adelanto:

$$G_c(j\omega) = \frac{K(j\omega + z)}{(j\omega + p)} = \frac{\frac{Kz}{p}\left(j\left(\frac{\omega}{z}\right)+1\right)}{\left(j\left(\frac{\omega}{p}\right)+1\right)}$$

$$G_c(j\omega) = \frac{K_1(1 + j\omega\alpha\tau)}{(1 + j\omega\tau)} = \left.\frac{K_1(1+\alpha\tau s)}{(1+\tau s)}\right|_{s=j\omega}$$

$$\tau = \frac{1}{p} \qquad \alpha = \frac{p}{z} \qquad K_1 = \frac{K}{\alpha}$$

Ángulo de fase es:

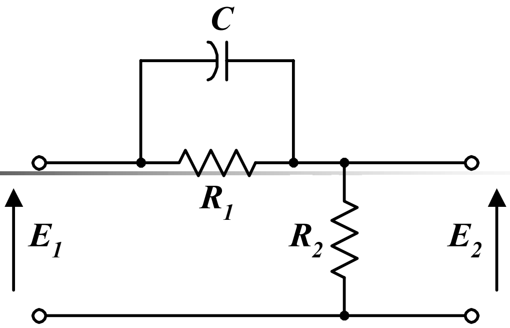
$$\phi(\omega) = tan^{-1}\,\alpha\omega\tau - tan^{-1}\,\omega\tau$$

El máximo de adelanto se presenta en:

$$\omega_m = \sqrt{zp} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

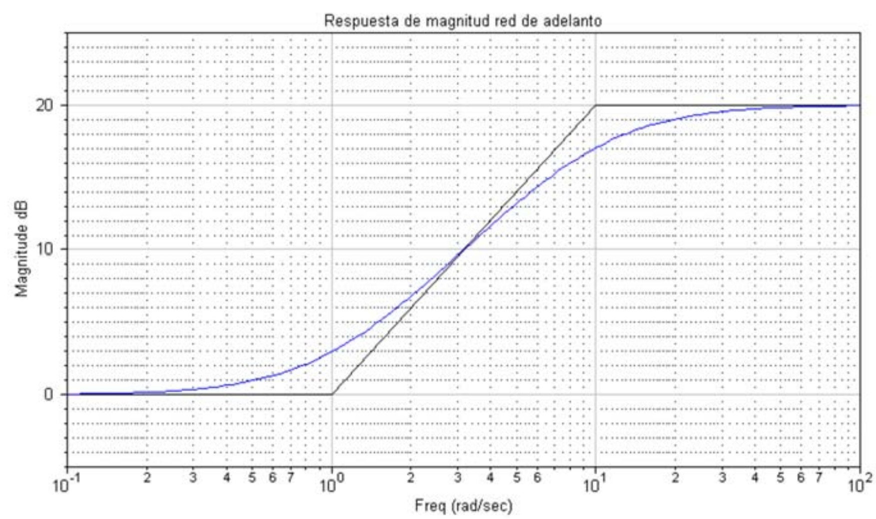
Y tiene un valor de:

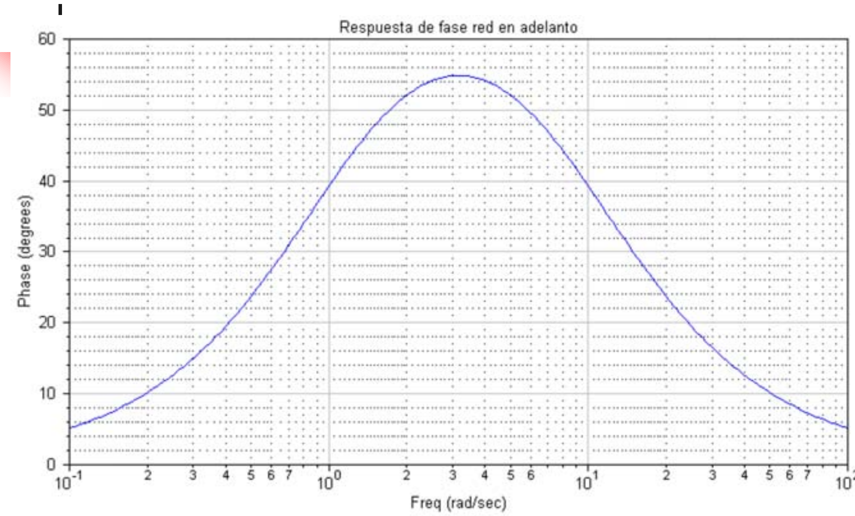
$$tan\,\phi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \qquad sen\,\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

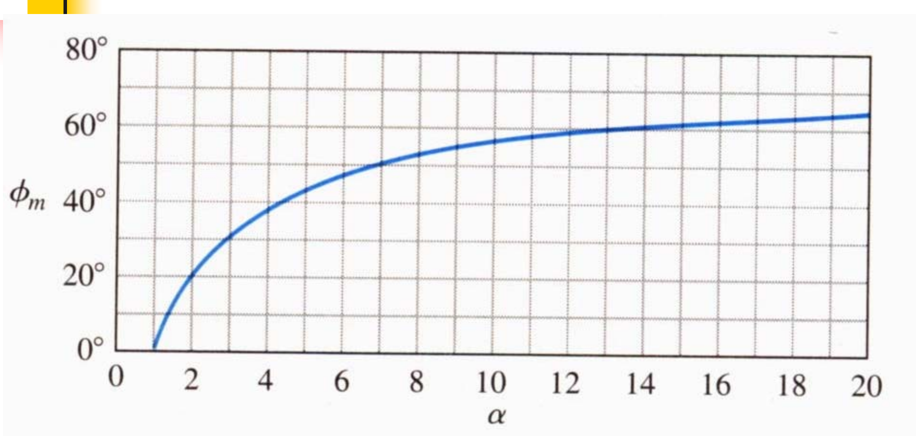


$$G_c(s) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\frac{R_1 C s + 1}{\left[R_1 R_2 \big/ (R_1 + R_2)\right] C s + 1}$$

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{\alpha(1 + \tau s)} \qquad \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \qquad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

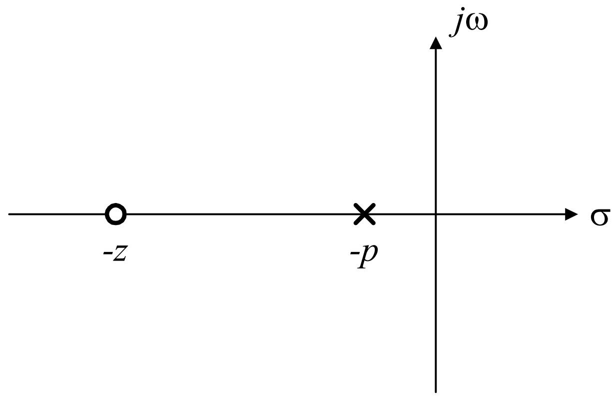


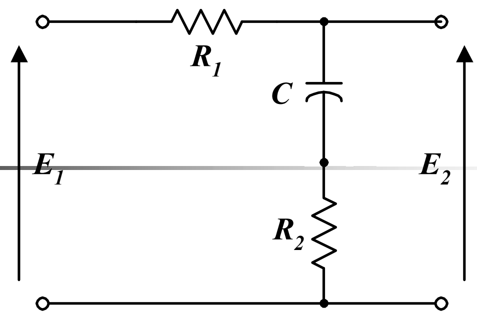

Respuesta de fase red en adelanto
Phase (degrees)
60
50
40
30
20
10
0
10^{-1}
2
3
4
5
6
7
10^{0}
2
3
4
5
6
10^{1}
2
3
4
5
6
7
10^{2}
Freq (rad/sec)


80°
60°
ϕ_m 40°
20°
0°
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
α

Red en atraso de fase

Configuración de polos y ceros:

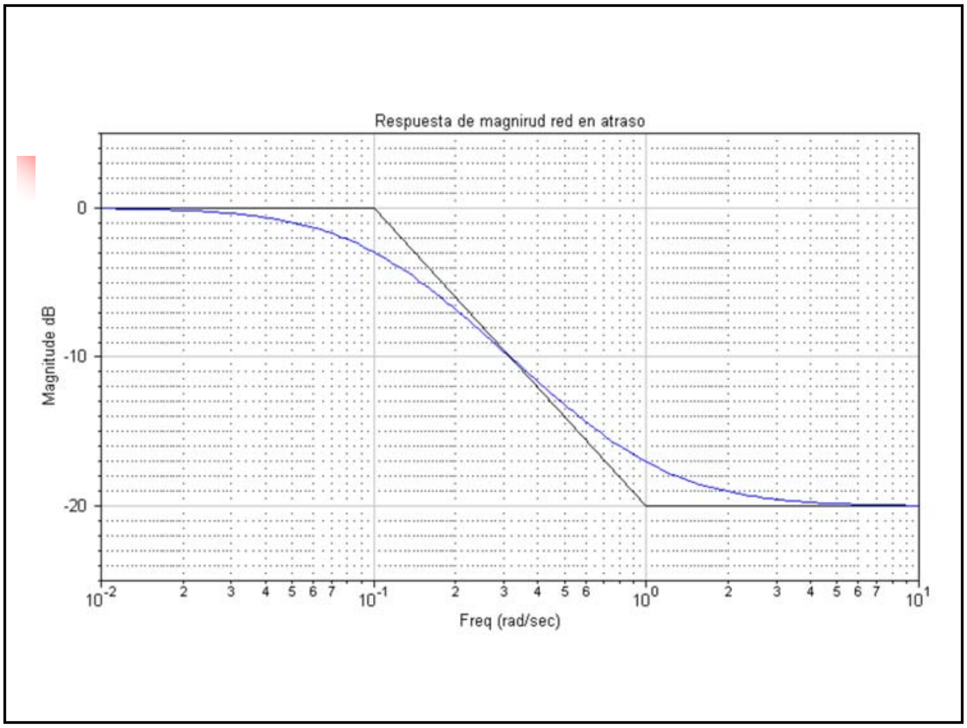


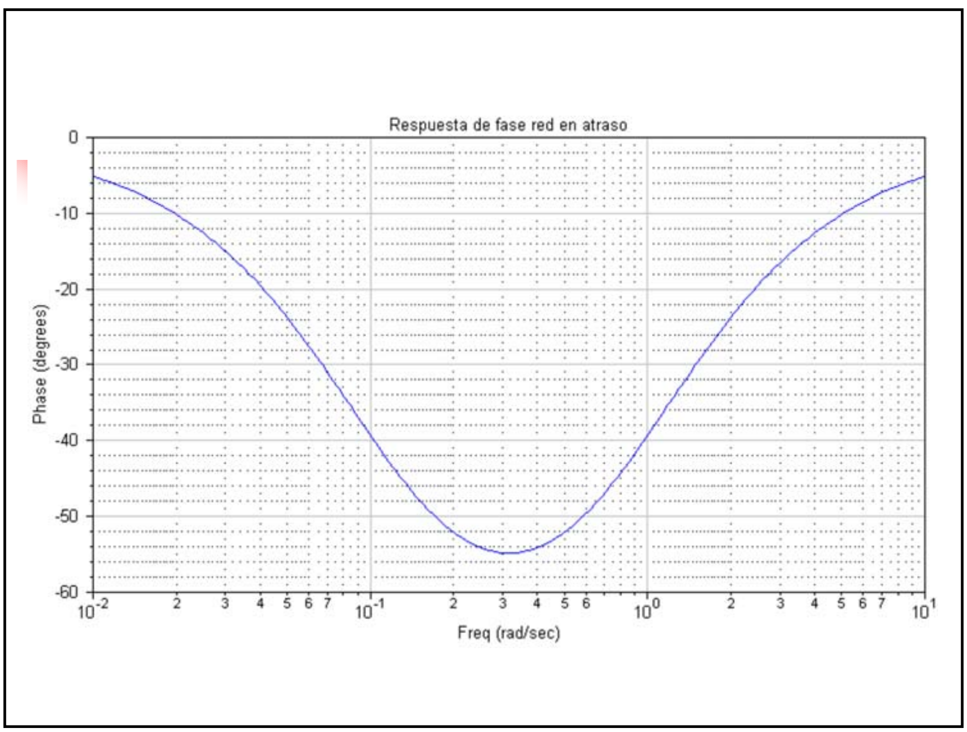


$$G_c(s)=\frac{E_2(s)}{E_1(s)}=\frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1}$$

$$G_c(s)=\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}=\frac{1}{\alpha}\frac{(s+z)}{(s+p)}$$

$$\tau=R_2C \quad \alpha=\frac{R_1+R_2}{R_2} \quad z=\frac{1}{\tau} \quad p=\frac{1}{\alpha\tau}$$


Respuesta de magnirud red en atraso
Magnitude dB
0
-10
-20
Freq (rad/sec)


Respuesta de fase red en atraso
Phase (degrees)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
Freq (rad/sec)

Ángulo de fase es:

$$\phi(\omega) = tan^{-1}\omega\tau - tan^{-1}\alpha\omega\tau$$

El máximo de atraso se presenta en:

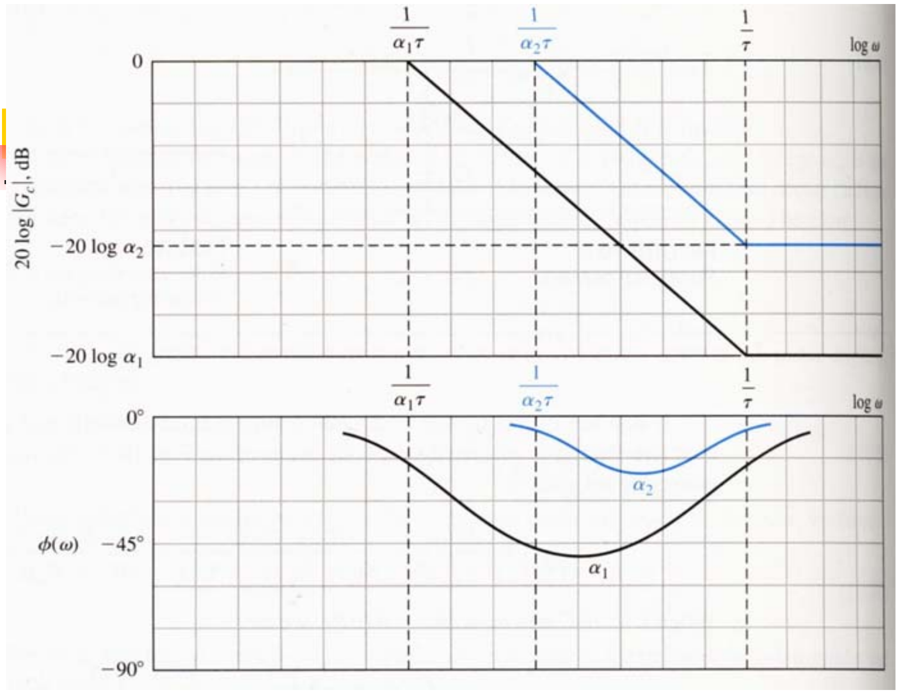
$$\omega_m = \sqrt{zp} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

Y tiene un valor de:

$$tan\,\phi_m = \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \qquad sen\,\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

Red en adelanto: utilizada para dar un ángulo de adelanto de fase, y por tanto un adecuado margen de fase.

Red en atraso: un ángulo en atraso de fase es deseatabilizante. Provee atenuación e incrementa la constante de error de estado estacionario.



2. Diseño en adelanto de fase usando los diagramas de Bode

1. Evaluar el margen de fase del sistema, cuando las constantes de error son satisfechas.
2. Con un pequeño margen de seguridad, determinar el adelanto de fase adicional necesario, ϕ_m.
3. Evaluar α de la ecuación:

$$sen\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

4. Evaluar *10 log* α y determinar la frecuencia donde la curva de magnitud no-compensada es igual a *-10 log* α. Esta frecuencia es la nueva frecuencia en 0 dB y ω_m, porque la red en adelanto proporciona *10 log* α en ω_m.
5. Calcular el polo y cero:

$$p = \omega_m \sqrt{\alpha} \qquad z = p/\alpha$$

6. Dibujar la respuesta en frecuencia compensada, comprobando el margen de fase resultante, repetir los pasos en caso de ser necesario. Finalmente, para un diseño aceptable, elevar la ganancia del amplificador para anular la atenuación $1/\alpha$.

Ejemplo 1.

Considerando un sistema de control con realimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{K}{s^2}$$

Sistema tipo 2 (paso 1). En lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + K}$$

Especificaciones ante entrada escalón:

Tiempo de establecimiento: $T_s \leq 4$ seg.

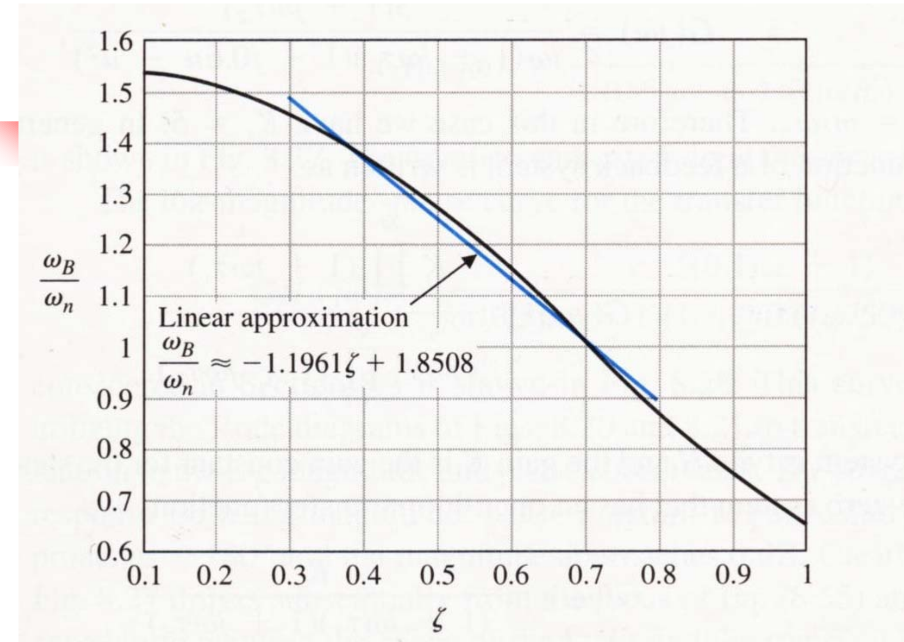
Amortiguamiento: $\xi \geq 0.45$

El tiempo de establecimiento es:

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 2.22$$

Para la respuesta en frecuencia, relacionando ω_n con ω_B, de la figura:

$$\omega_B \approx 1.33\omega_n \quad \omega_B \approx 3.00$$



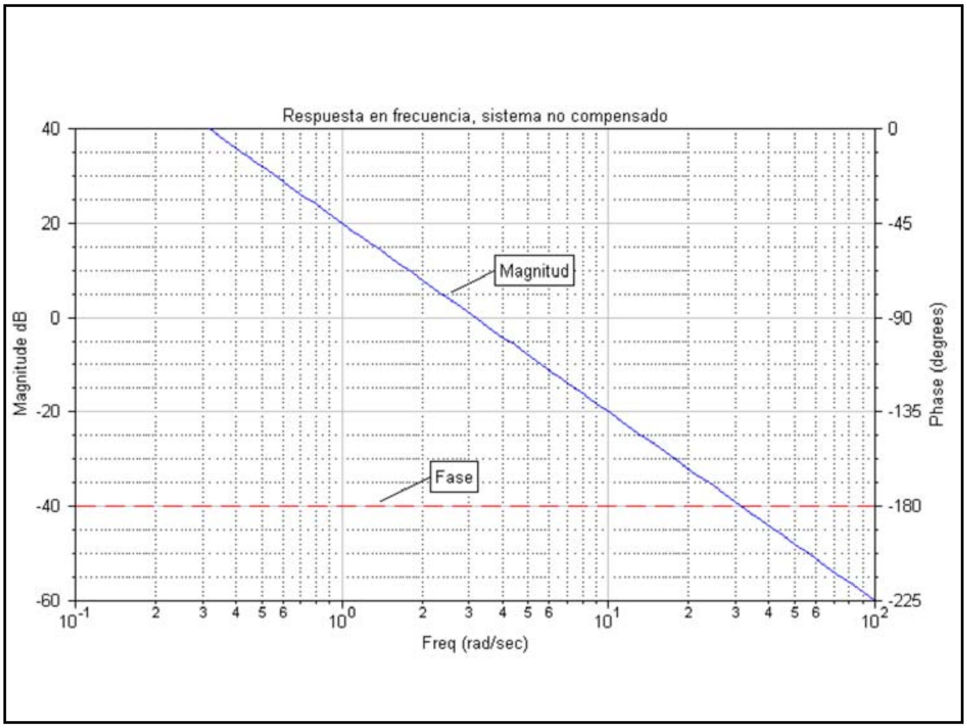
Para un sistema de segundo orden:

$$\omega_n \approx \sqrt{K} \quad \Rightarrow \quad K \approx 5 \quad ó \quad K = 10$$

El margen de fase de un sistema de segundo orden es:

$$\phi_{pm} = tan^{-1}\left(2\xi\left[\frac{1}{\left(4\xi^4+1\right)^{1/2}-2\xi^2}\right]^{1/2}\right)$$

$$\xi \approx 0.01\phi_{pm}$$


Respuesta en frecuencia, sistema no compensado
Magnitud
Fase
Magnitude dB
Phase (degrees)
Freq (rad/sec)
40
20
0
-20
-40
-60
0
-45
-90
-135
-180
-225
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

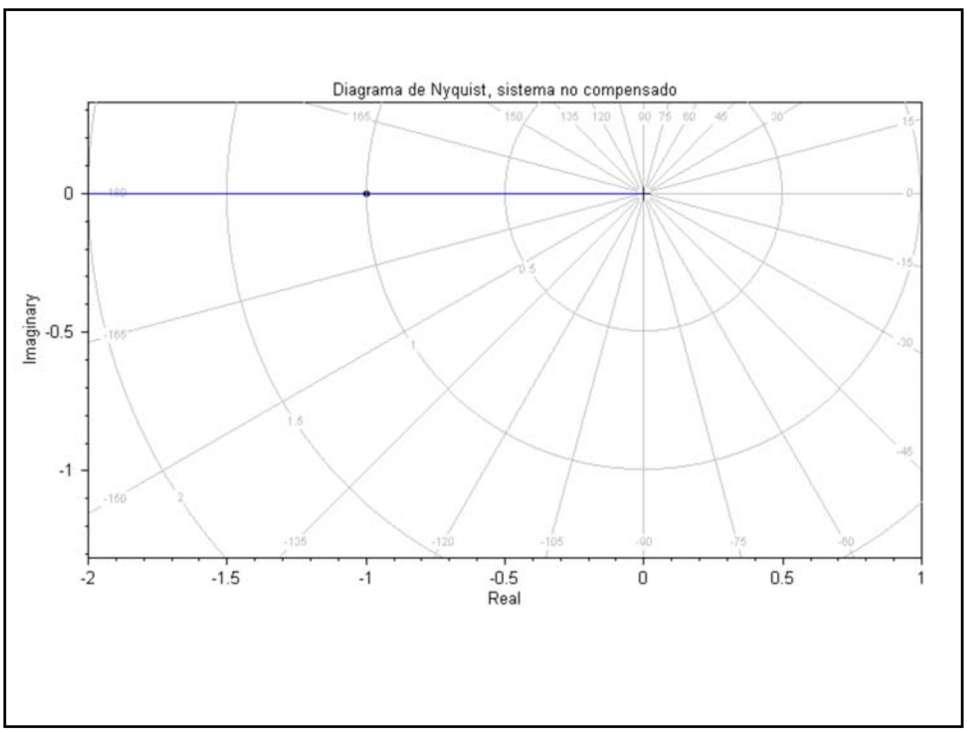


Diagrama de Nyquist, sistema no compensado
Imaginary
Real
0
-0.5
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1

Margen de fase requerido:

$$\phi_{pm} = 45°$$

Se debe adicionar 45° en la frecuencia de cruce (0 dB). Por tanto:

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \sin 45° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5.8 \approx 6$$

$$10 \, log \, \alpha = 7.78 \, dB$$

La red adiciona 7.78 dB en ω_m. El sistema no compensado tiene –7.78 dB en ω=4.948, entonces:

$$\omega = \omega_m = 4.498 \, rad/seg$$

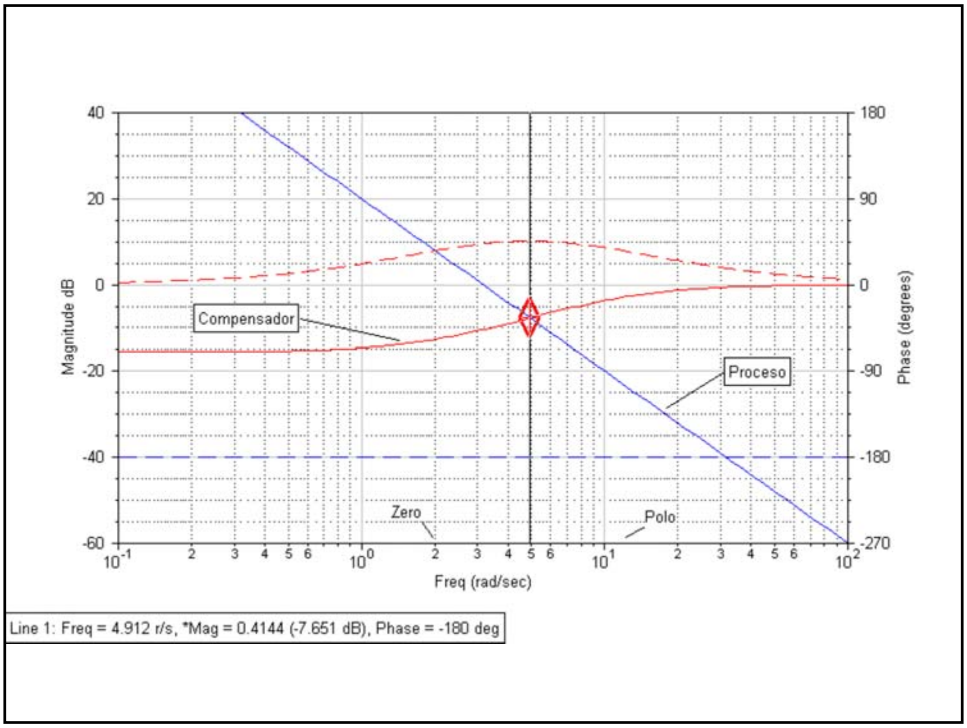
Por tanto:

$$p = \omega_m \sqrt{\alpha} = 12 \quad z = p/\alpha = 2$$

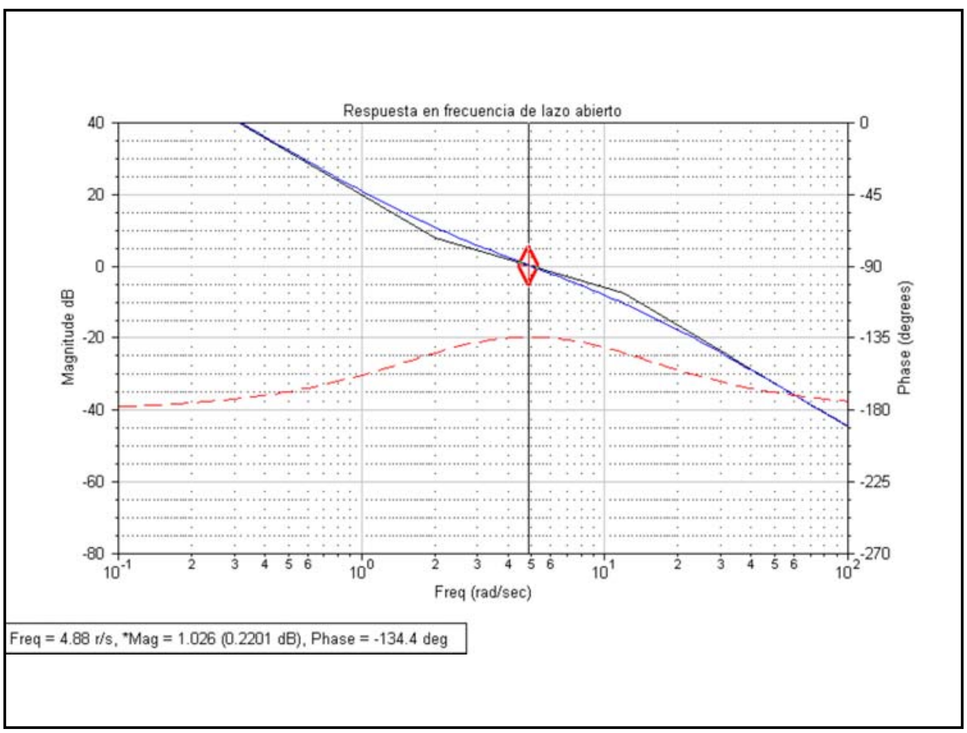
Función de transferencia de lazo abierto:

$$G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10\left[\left(j\omega/2\right)+1\right]}{(j\omega)^2\left[\left(j\omega/12\right)+1\right]}$$

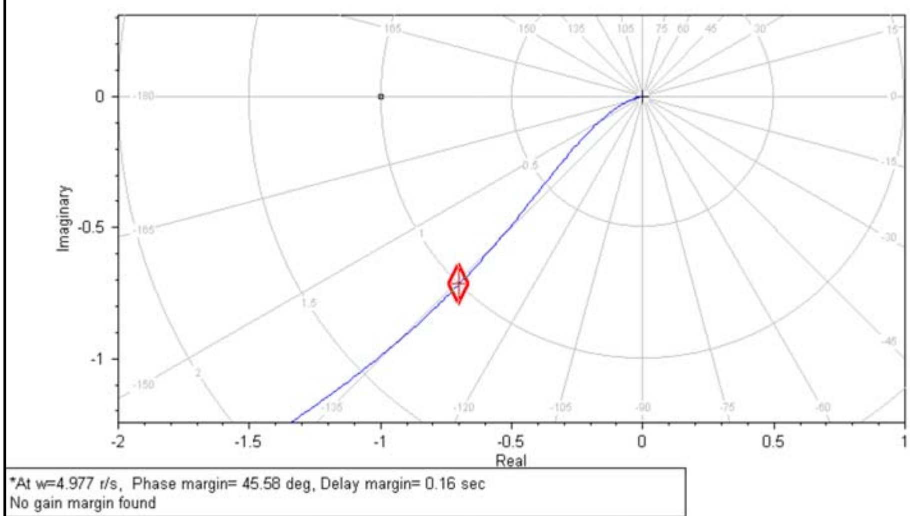
$$G_c(j\omega) = \frac{1}{6}\frac{\left[1+\left(s/2\right)\right]}{\left[1+\left(s/12\right)\right]}$$



Magnitude dB
Phase (degrees)
Compensador
Proceso
Zero
Polo
Freq (rad/sec)
Line 1: Freq = 4.912 r/s, *Mag = 0.4144 (-7.651 dB), Phase = -180 deg



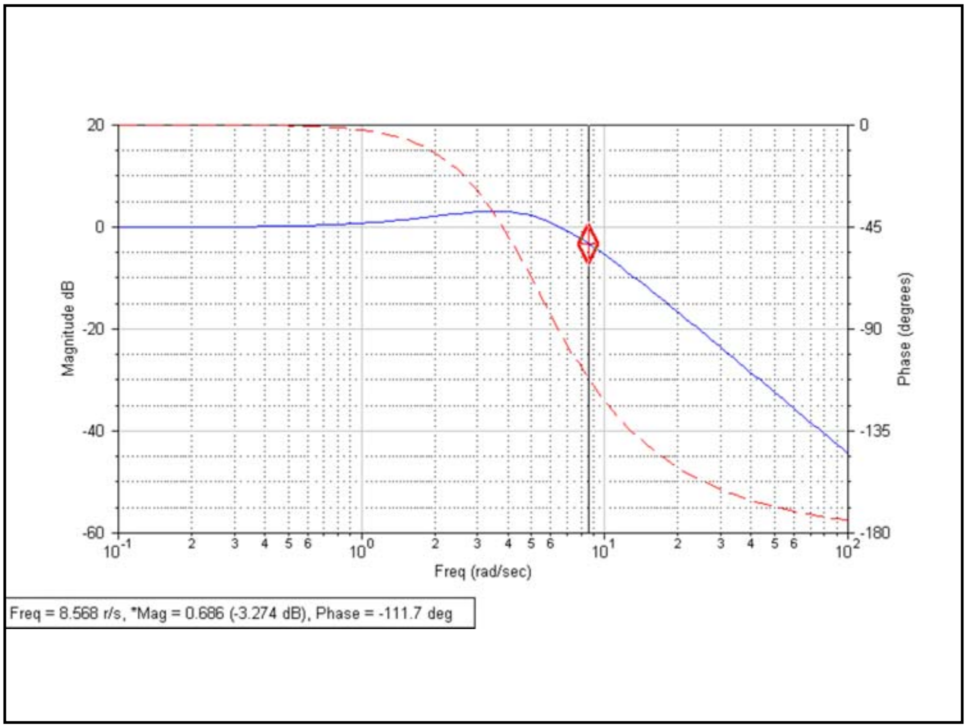
Respuesta en frecuencia de lazo abierto
Magnitude dB
Phase (degrees)
Freq (rad/sec)
Freq = 4.88 r/s, *Mag = 1.026 (0.2201 dB), Phase = -134.4 deg

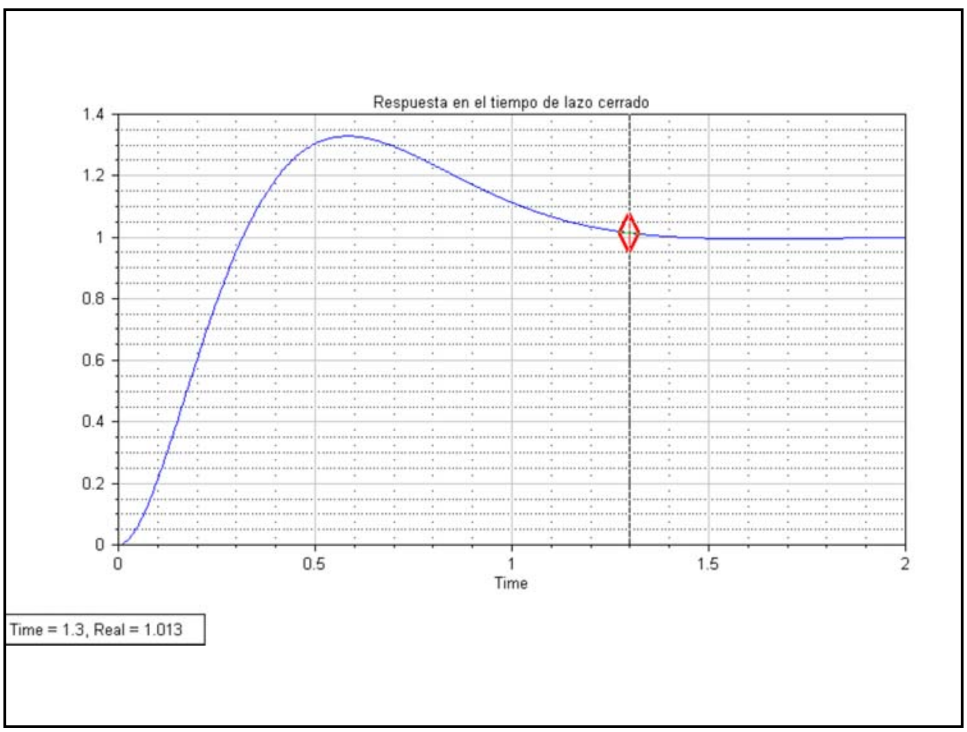


Función de transferencia de lazo cerrado:

$$T(s)=\frac{60(s+2)}{s^3+12s^2+60s+120}$$

$$T(s)=\frac{60(s+2)}{(s+4.644)\left[(s+3.678)^2+3.509^2\right]}$$


20
0
-20
-40
-60
Magnitude dB
0
-45
-90
-135
-180
Phase (degrees)
Freq (rad/sec)
Freq = 8.568 r/s, *Mag = 0.686 (-3.274 dB), Phase = -111.7 deg


Respuesta en el tiempo de lazo cerrado
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1.5
2
Time
Time = 1.3, Real = 1.013

Ejemplo 2.-

Un sistema de control de lazo abierto tiene la función de transferencia:

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Diseñar un compensador para: error de estado estacionario a entrada rampa de 5%, y un margen de fase de por lo menos 45°.