Solución Primer Examen Parcial
ELT 3832 - Diseño de Sistemas de Control
Semestre 2-2003

M.Sc.Ing. Ramiro Franz Aliendre García

3 de diciembre de 2003

1. Primera Pregunta.

Un sistema de control para ayudar a caminar a personas parcialmente discapacitadas, es inestable en lazo abierto, tal como se muestra en la figura. Usando el lugar geométrico de las raíces, seleccionar K para el máximo valor de ξ alcanzable de los polos complejos. Predecir la respuesta al escalón del sistema, para este valor de ξ.

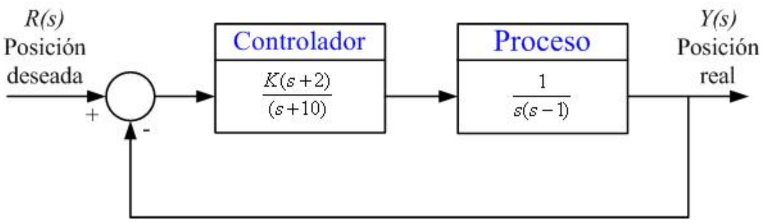

Figura 1: Sistema de control para caminar.

Respuesta.

La función de transferencia de lazo abierto del sistema es:

$$G\left(s\right) = \frac{s+2}{s\left(s+10\right)\left(s-1\right)}$$

El cero de $G\left(s\right)$ es: $z_1 = -2$, y los polos son: $p_1 = 0$; $p_2 = -10$; $p_3 = 1$. El centro de asíntotas del LGR es:

$$\sigma_A = \frac{0-10+1+2}{3-1} = -3{,}5$$

Los ángulos de las asíntotas serán:

$$\phi_1 = 90^\circ$$

$$\phi_2 = 270^\circ$$

Para determinar los valores de K y ω para los cuales el LGR corta al eje imaginario, se obtiene de:

$$1 + KG(\jmath\omega) = 1 + K\frac{\jmath\omega + 2}{\jmath\omega(\jmath\omega + 10)(\jmath\omega - 1)} = 0$$

o también:

$$-\jmath\omega^3 - 9\omega^2 + (K - 10)\jmath\omega + 2K = 0$$

igualando la parte real y la parte imaginaria a cero:

$$-9\omega^2 + 2K = 0$$

$$-\omega^3 + (K - 10)\omega = 0$$

se obtienen los valores: $K = 12{,}857$ y $\omega = 1{,}690$ rad/seg.

Para calcular los puntos de ruptura del LGR, despejando la ganancia:

$$K = -\frac{s(s + 10)(s - 1)}{s + 2}$$

derivando respecto a s e igualando a cero $\frac{dK}{ds} = 0$ se obtiene:

$$2s^3 + 15s^2 + 36s - 20 = 0$$

resolviendo por tanteos, se calcula la raíz real que es el punto de ruptura y vale: $s = 0{,}461$.

Una gráfica del LGR del sistema será:

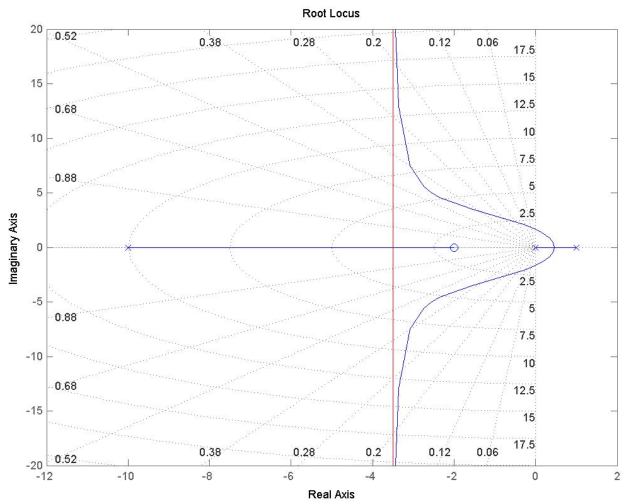

Figura 2: Lugar geométrico de las raíces.

Para determinar el valor de la ganancia con la cual se obtiene el mayor valor de amortiguamiento, se realiza mediante tanteos, que son mostrados en el cuadro 1. Se comienza con un valor de ganancia mayor al calculado en el cruce por el eje imaginario.

También se puede calcular el valor de la ganancia para mayor amortiguamiento, poniendo los polos de lazo cerrado en función de ξ, y luego derivando, pero esto implica también, encontrar la solución de una ecuación trascendente mediante tanteos.

La respuesta de lazo cerrado con $K = 57$ ante escalón, tiene las siguientes características:

Valor de K	Polo real	Polos complejos	Amortiguamiento ξ
20	-8.3763	-0.3119 $\pm\jmath$ 2.1163	0.1427
30	-7.3925	-0.8038 $\pm\jmath$ 2.7332	0.2821
40	-6.2477	-1.3761 $\pm\jmath$ 3.3032	0.3846
50	-5.0	-2.0 $\pm\jmath$ 4.0	0.4472
60	-4.0	-2.5 $\pm\jmath$ 4.8734	0.4564
61	-3.9253	-2.5373 $\pm\jmath$ 4.9641	0.4551
55	-4.4439	-2.2781 $\pm\jmath$ 4.4231	0.4579
57	**-4.2519**	**-2.3741 $\pm\jmath$ 4.6017**	**0.4585**
59	-4.0792	-2.4604 $\pm\jmath$ 4.7826	0.4575
56	-4.3455	-2.3273 $\pm\jmath$ 4.5120	0.4584

Cuadro 1: Determinación K para mayor amortiguamiento.

- Error de estado estacionario cero: $e_{ss} = 0$ (sistema tipo 1).
- Tiempo de establecimiento (criterio del 2 %): $t_s = \frac{4}{\sigma} = 1{,}6848$.
- Amortiguamiento: $\xi = 0{,}4585$
- Sobrepico: $M_p = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0{,}198$, o también: 19,8 %.
- Tiempo de pico: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0{,}6827$ seg.

Con los datos anteriores se puede esbozar una respuesta aproximada del sistema ante entrada escalón. Sin embargo, es de esperar que haya diferencias con la respuesta exacta del sistema, que se muestra en la siguiente figura:

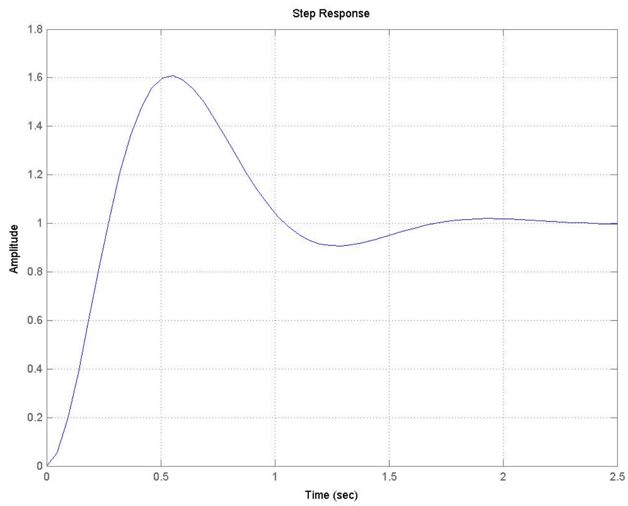

Figura 3: Respuesta exacta del sistema.

2. Segunda Pregunta.

Para el sistema mostrado en la siguiente figura, sintonizar un PID, mediante las reglas de Ziegler-Nichols.

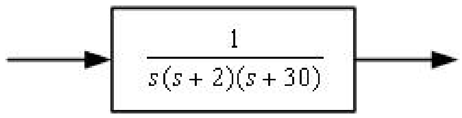

Figura 4: Sistema en lazo abierto, pregunta 2.

Respuesta.

Como el sistema tiene un polo en el origen, es evidente que la respuesta ante entrada escalón no provocará la típica respuesta de "s" alargada, y por lo tanto no se puede utilizar el método de Z-N de lazo abierto. Planteando el siguiente sistema de lazo cerrado:

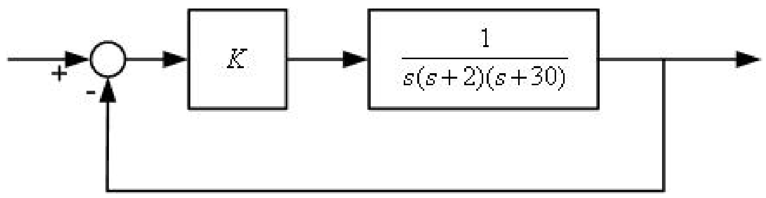

Figura 5: Sistema en lazo cerrado.

Para aplicar el método de lazo cerrado de Z-N, se debe calcular la ganancia crítica y el periodo de oscilación. La ecuación característica del sistema es:

$$s^3 + 32s^2 + 60s + K = 0$$

Para hallar el valor de K que hace el sistema marginalmente estable (donde el LGR cruza el eje imaginario), se hace $s = \jmath\omega$, y se obtiene:

$$(\jmath\omega)^3 + 32\,(\jmath\omega)^2 + 60\,(\jmath\omega) + K = 0$$

Igualando la parte real e imaginaria igual a cero:

$$-32\omega^2 + K = 0$$

$$-\omega^3 + 60\omega = 0$$

Resolviendo, se obtiene $\omega_{cr} = \sqrt{60}$ rad/seg y $K_{cr} = 1920$. Luego el periodo crítico será: $T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = 0{,}8112$ seg. Con estos datos, se hace el cálculo de los parámetros del controlador PID mediante Z-N de lazo cerrado:

$$K_p = 0{,}6K_{cr} = 0{,}6 * 1920 = 1152$$

$$T_i = 0{,}5T_{cr} = 0{,}5 * 0{,}8112 = 0{,}4056$$

$$T_d = 0{,}125T_{cr} = 0{,}125 * 0{,}8112 = 0{,}1014$$

La función de transferencia del controlador PID, en sus diferentes formas será:

$$G_c\left(s\right) = 1152\left(1 + \frac{1}{0{,}4056s} + 0{,}1014s\right)$$

$$G_c\left(s\right) = 1152 + \frac{2840{,}2367}{s} + 116{,}8128s$$

$$G_c\left(s\right) = 116{,}8128\frac{\left(s + 4{,}9310\right)^2}{s}$$

El sistema en lazo cerrado con el controlador PID se muestra en la siguiente figura:

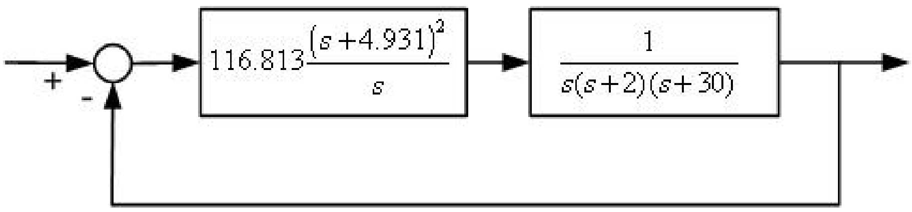

Figura 6: Sistema en lazo cerrado, con el controlador PID.

La función de transferencia de lazo cerrado está dada por:

$$G_{lc}\left(s\right) = \frac{116{,}8128\left(s + 4{,}931\right)^2}{s^4 + 32s^3 + 176{,}8128s^2 + 1152s + 2840{,}275}$$

que expresado en forma de polos y ceros es:

$$G_{lc}\left(s\right) = \frac{116{,}8128\left(s + 4{,}931\right)^2}{\left(s + 3{,}2237\right)\left(s + 26{,}8687\right)\left[\left(s + 0{,}9538\right)^2 + 5{,}6464^2\right]}$$

los polos dominantes son: $p_{1,2} = -0{,}9538 \pm \jmath 5{,}6464$, con los cuales se determina las siguientes características de la respuesta en lazo cerrado ante entrada escalón:

- Error de estado estacionario: $e_{ss} = 0\,\%$ (sistema tipo 1).
- Tiempo de establecimiento (criterio del 2 %): $t_s = \frac{4}{\sigma} = 4{,}1938$ seg.
- Amortiguamiento: $\xi = 0{,}1666$
- Sobrepico: $M_p = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0{,}5882$ o también: 58,82 %.
- Tiempo de pico: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0{,}5564$ seg.

Estos valores serán levemente afectados por la presencia de los ceros. La respuesta temporal del sistema, obtenida mediante simulación, se muestra en la siguiente figura:

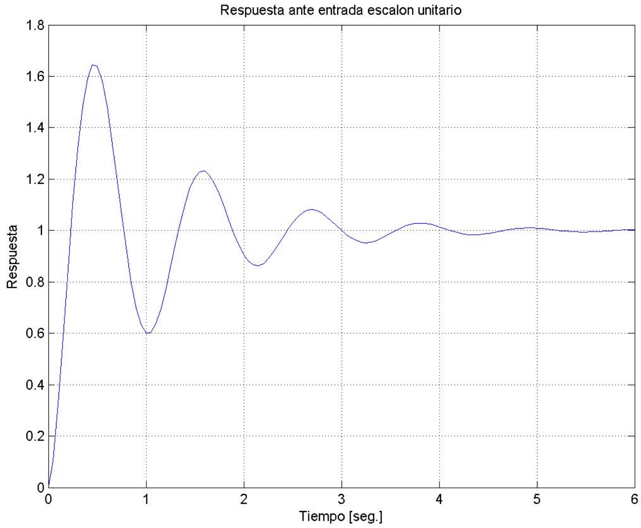

Figura 7: Respuesta del sistema en lazo cerrado.

3. Tercera Pregunta.

Para el sistema de la pregunta anterior, considerándolo como un sistema de segundo orden, mediante la técnica del LGR, diseñar un controlador PID para requerimientos de diseño adecuado. Comparar con los resultados obtenidos en la pregunta anterior.

Respuesta.

Para poder considerar el sistema como uno de segundo orden, se debe expresar el sistema en forma de constantes de tiempo, es decir:

$$G(s) = \frac{0{,}0167}{s\,(0{,}5s+1)\,(0{,}0333s+1)}$$

despreciando la constante de tiempo más baja, la función de transferencia queda como:

$$G(s) = \frac{0{,}0167}{s\,(0{,}5s+1)}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{30}}{s\,(s+2)}$$

Los requerimientos de diseño adoptados, para entrada escalón, son los siguientes:

- Error de estado estacionario: $e_{ss} = 0\,\%$.
- Tiempo de establecimiento (criterio del 2 %): $t_s = 1$ seg.
- Sobrepico: $M_p = 0{,}043$ o también: $4{,}3\,\%$.

Para cumplir con los requerimientos anteriores, los polos deseados de lazo cerrado deben cumplir:

- Tiempo de establecimiento: $t_s = \frac{4}{\sigma}$, se obtiene:

$$\sigma = \frac{4}{t_s} = \frac{4}{1} = 4$$

- Sobrepico: $M_p = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0{,}043$

$$\xi = 0{,}707$$

  que es equivalente a decir que $cos\theta = 0{,}707$ o también $\theta = 45°$, es decir: $tan\theta = \frac{\omega_d}{\sigma} = 1$. Por tanto: $\omega_d = 4$

Los polos deseados son entonces:

$$p_d = -4 \pm \jmath 4$$

La función de transferencia del controlador PID está dada por:

$$G_c(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{s}$$

el cero en $-a$ se elige aproximadamente a $\frac{1}{6}$ de la parte real del polo dominante, es decir $a = \frac{4}{6} = 0{,}6667$. Se puede asumir $a = 0{,}5$.

Para el cálculo de b, se utiliza la condición de ángulo del LGR. La figura 8 ilustra esto.

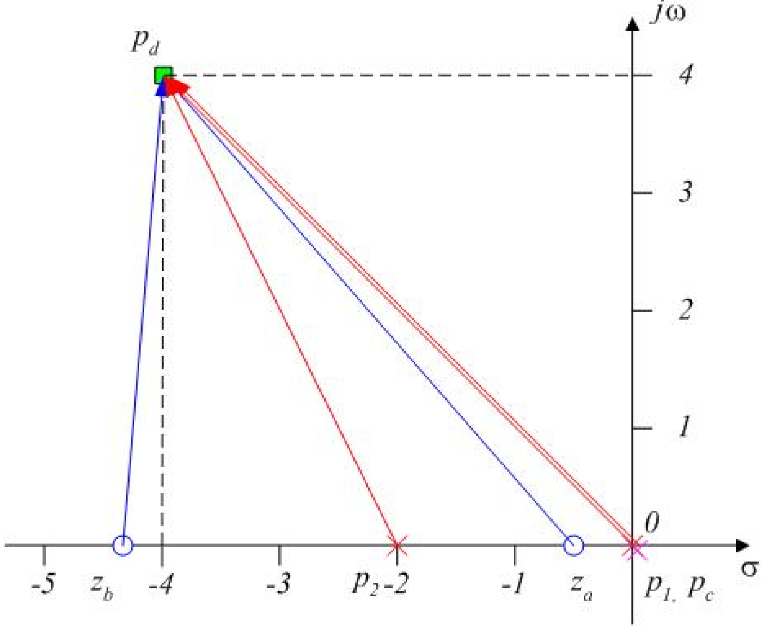

Figura 8: Diagrama vectorial LGR.

$$\theta_{z_a} + \theta_{z_b} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_c} = -180°$$

$$131{,}1859° + tan^{-1}\left(\frac{4}{b-4}\right) - 135° - 116{,}5651° - 135° = -180°$$

$$tan^{-1}\left(\frac{4}{b-4}\right) = 75{,}3792°$$

de aquí:

$$b = 5{,}0435$$

El cálculo de K_{rl} se realiza mediante la condición de magnitud del LGR, es decir:

$$K_{rl} = \frac{\sqrt{4^2+4^2}\sqrt{2^2+4^2}\sqrt{4^2+4^2}}{\sqrt{3{,}5^2+4^2}\sqrt{1{,}0435^2+4^2}}$$
$$K_{rl} = 6{,}5133$$

De otro lado: $K_{rl} = \frac{1}{30} * K$, por tanto:

$$K = 30K_{rl} = 30 * 6{,}5133 = 195{,}398$$

La función de transferencia del controlador PID es entonces:

$$G_c(s) = \frac{195{,}398\,(s+0{,}5)\,(s+5{,}0435)}{s}$$

El lugar geométrico de las raíces se muestra en la figura 9:

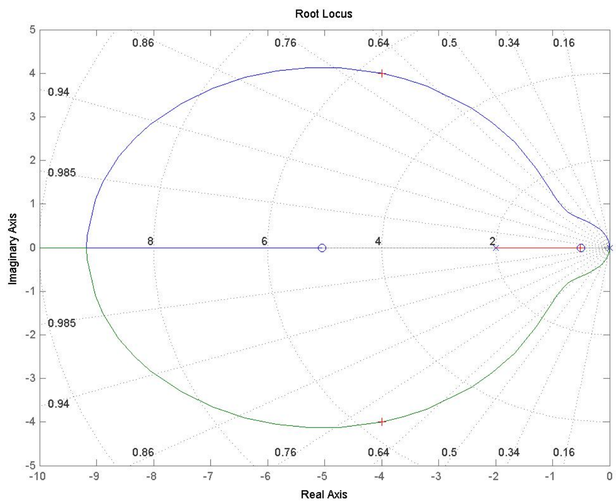

Figura 9: Lugar geométrico de las raíces.

La función de transferencia de lazo cerrado, incluyendo el polo despreciado es:

$$G_{lc}(s) = \frac{195{,}398s\,(s+0{,}5)\,(s+5{,}0435)}{s^4+32s^3+255{,}398s^2+1083{,}189s+492{,}7449}$$

que expresada en forma de polos y ceros es:

$$G_{lc}(s) = \frac{195{,}398s^2\,(s+0{,}5)\,(s+5{,}0435)}{(s+0{,}513)\,(s+22{,}8589)\left[(s+4{,}314)^2+4{,}8379^2\right]}$$

donde los polos dominantes calculados son:

$$p_d = -4{,}314 \pm \jmath 4{,}8379$$

La respuesta temporal del sistema se muestra en la figura 10:

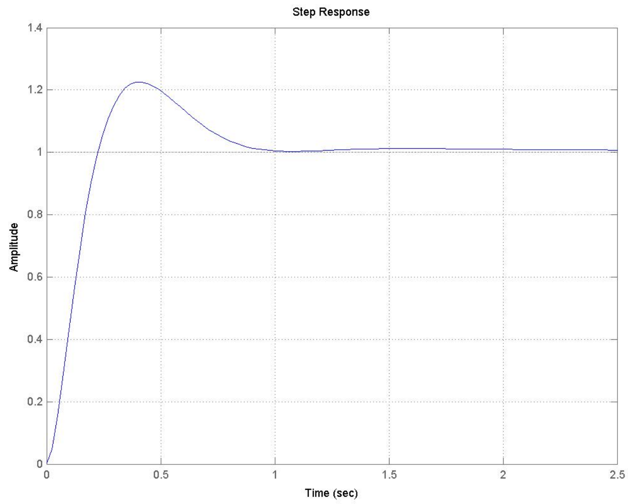

Figura 10: Respuesta del sistema ante entrada escalón.

Los requerimientos de diseño no se cumplen con exactitud, debido a la presencia de los ceros del controlador, y a que en el diseño no se tomó en cuenta al polo en -30.