

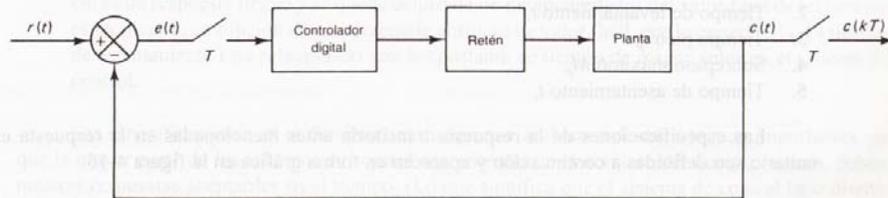
ELT 2642 Sistemas de Control II

TEMA:

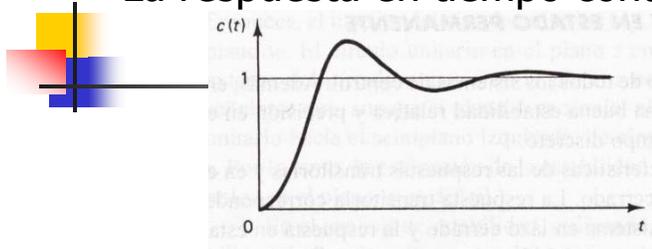
Análisis de sistemas de control en tiempo discreto mediante métodos convencionales

1. Análisis de respuesta transitoria y en estado permanente

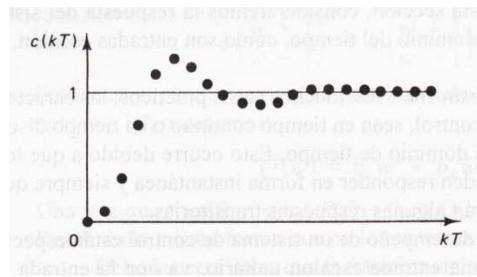
Especificaciones de la respuesta transitoria. Para el sistema:



La respuesta en tiempo continuo es:



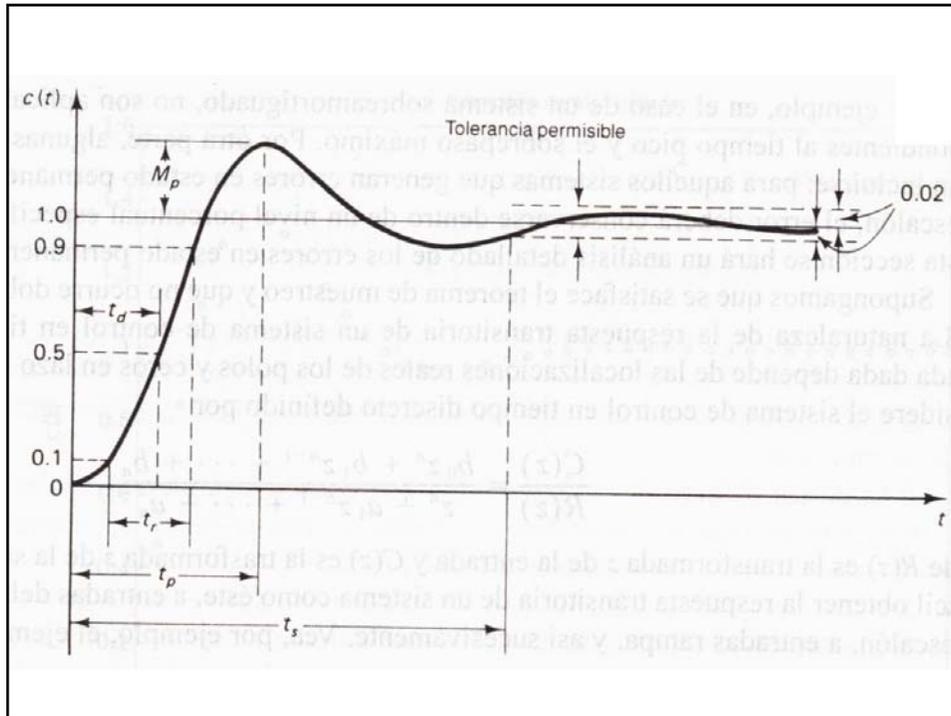
en tiempo discreto es:



Las especificaciones de la respuesta transitoria son:

1. Tiempo de retardo: t_d
2. Tiempo de levantamiento: t_r
3. Tiempo de pico: t_p
4. Sobrepico máximo: M_p
5. Tiempo de asentamiento: t_s

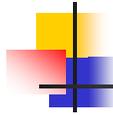
Estas especificaciones se muestran en la figura:



IMPORTANTE:

Si se cumple el teorema del muestreo y no ocurre doblamiento de frecuencia, la respuesta transitoria de un sistema de control de tiempo discreto, depende de la localización de los polos y ceros en lazo cerrado en el plano z del sistema:

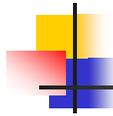
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$



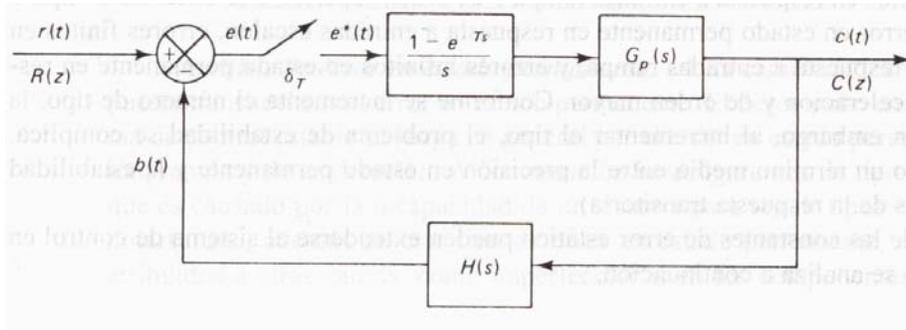
Error de estado permanente.

Los sistemas de control en td se clasifican por el número de polos en $z=1$ (corresponde a un integrador en el lazo):

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)}$$



Considerando el sistema:



Suponiendo el sistema estable.

El error está dado por:

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

Para tiempo discreto, por el teorema del valor final:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) E(z) \right]$$

Para el sistema mostrado:

$$E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)} R(z)$$

El error de estado estacionario será:

$$e_{SS} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \right]$$

con:

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G_P(s)H(s)}{s} \right]$$

Error de posición: Para entrada escalón:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Luego:

$$e_{SS} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + GH(z)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

con:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$$

Error de velocidad: Para entrada rampa:

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Luego:

$$e_{SS} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1 - z^{-1})GH(z)} = \frac{1}{K_v}$$

con:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})GH(z)}{T}$$

Error de aceleración: Para entrada parábola:

$$R(z) = \frac{T^2 (1 + z^{-1}) z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3}$$

Luego:

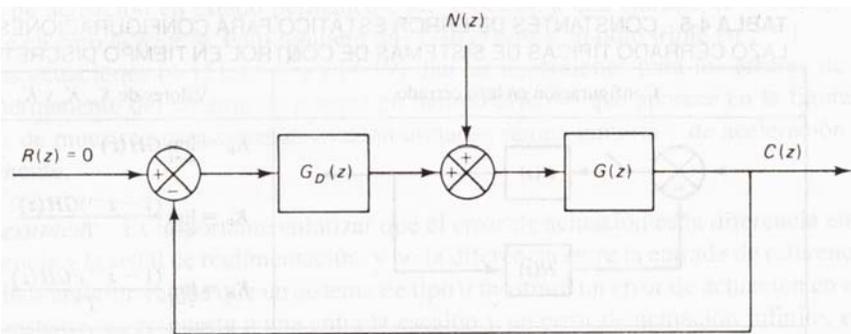
$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(1 - z^{-1})^2 GH(z)} = \frac{1}{K_a}$$

con:

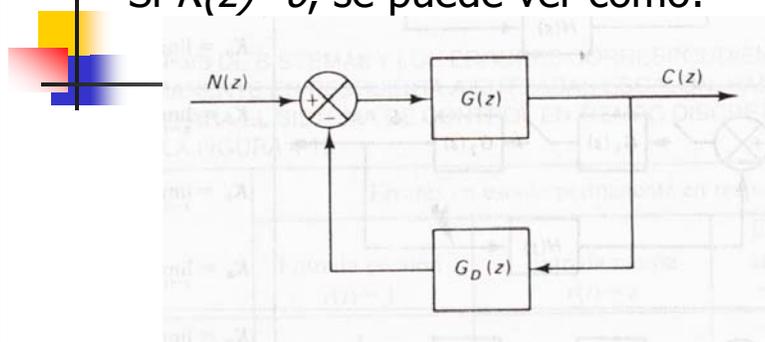
$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 GH(z)}{T^2}$$

Respuesta a perturbaciones.

Se estudia el efecto de las perturbaciones para el sistema:



Si $R(z)=0$, se puede ver como:



$$\frac{C(z)}{N(z)} = \frac{G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}$$

Si $|G_D(z)G(z)| \gg 1$, entonces:

$$\frac{C(z)}{N(z)} \cong \frac{1}{G_D(z)}$$

Luego:

$$E(z) = R(z) - C(z) = -C(z) = -\frac{1}{G_D(z)} N(z)$$

Si $G_D(z)$ incluye un integrador, entonces $E(z)$ es cero ante perturbación constante:

$$N(z) = \frac{N}{1 - z^{-1}}$$



Luego, $G_D(z)$ puede ser escrita como:

$$G_D(z) = \frac{G_{D1}(z)}{z-1} = \frac{z^{-1}G_{D1}(z)}{1-z^{-1}}$$

El error de estado estacionario será:

$$e_{SS} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1})E(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{-N(z)}{G_D(z)} \right]$$

$$e_{SS} = -\lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(1-z^{-1})N}{G_{D1}(z)z^{-1}} \right] = 0$$



2. Método del lugar geométrico de las raíces.

El LGR desarrollado para sistemas continuos, puede ser aplicado sin modificaciones en sistemas de td.

El límite de la estabilidad se modifica del eje $j\omega$ (tc) al círculo unitario (td). Por tanto la localización de los polos y ceros en td se interpreta de manera diferente a los de tc.



Condiciones de magnitud y ángulo.

Para la ecuación característica:

$$1 + G(z)H(z) = 0 \quad \text{ó} \quad 1 + GH(z) = 0$$

En general:

$$1 + F(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(z) = -1$$

CONDICIÓN DE ÁNGULO:

$$\angle F(z) = \pm 180^\circ (2k + 1)$$

CONDICIÓN DE MAGNITUD:

$$|F(z)| = 1$$



Procedimiento para construir el LGR.

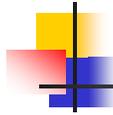
Para la ecuación característica:

$$1 + F(z) = 0$$

Expresada en la forma:

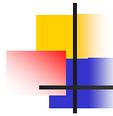
$$1 + \frac{K(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n)} = 0$$

Donde el parámetro de interés es K



Los pasos a seguir son:

1. Los puntos de inicio y fin del LGR son los polos y ceros de lazo abierto, respectivamente.
2. El número de ramas del LGR es igual al grado del polinomio característico.
3. Determinar las simetrías del LGR.
4. Determinar las asíntotas del LGR.
5. Determinar el centroide (intersección de las asíntotas del LGR).



6. Determinar el LGR que queda sobre el eje real.

7. Determinar los ángulos de salida y llegada del LGR.
8. Determinar los puntos de intersección del LGR con el eje imaginario.
9. Determinar los puntos de ruptura (puntos de silla) del LGR.

EJEMPLO.

Para el sistema mostrado, investigar el efecto del periodo de muestreo T en la respuesta de lazo cerrado. La ganancia K vale 2. El controlador digital, tiene como función de transferencia:

$$G_D(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} = K \frac{z}{z - 1}$$

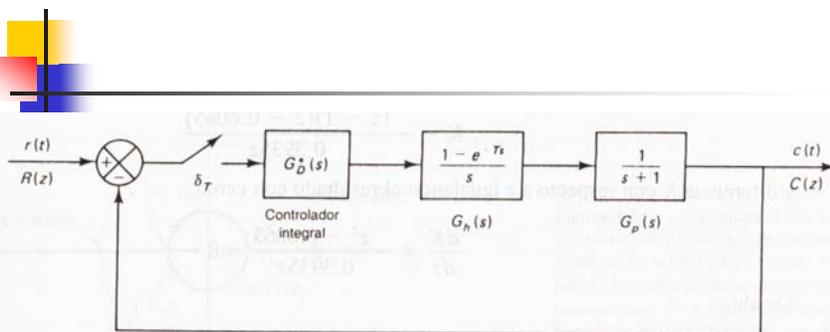


Figura 4-23 Sistema de control digital.