

7. Estabilidad de lazo cerrado en el plano z

Correspondencia entre el plano s y el plano z.

Localización de los polos y ceros en el plano s, de gran importancia para predecir el comportamiento dinámico del sistema.

En sistemas de tiempo discreto, la posición de polos y ceros depende también del periodo de muestreo

La variable s se relaciona con la variable z mediante:

$$z = e^{Ts}$$

con:

$$s = \sigma + j\omega$$

luego:

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega + 2\pi k)}$$

Los polos y ceros en el plano s cuyas frecuencias varíen en múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{T}$ corresponden a las mismas localizaciones en el plano z

Dado que σ es negativo, el SPI en el plano s corresponde a:

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

El eje $j\omega$ en el plano s corresponde a $|z|=1$

Franja primaria y franja secundaria.

Como $\angle z = \omega T$, entonces el ángulo de z varía de $-\infty$ a $+\infty$ como ω varía de $-\infty$ a $+\infty$

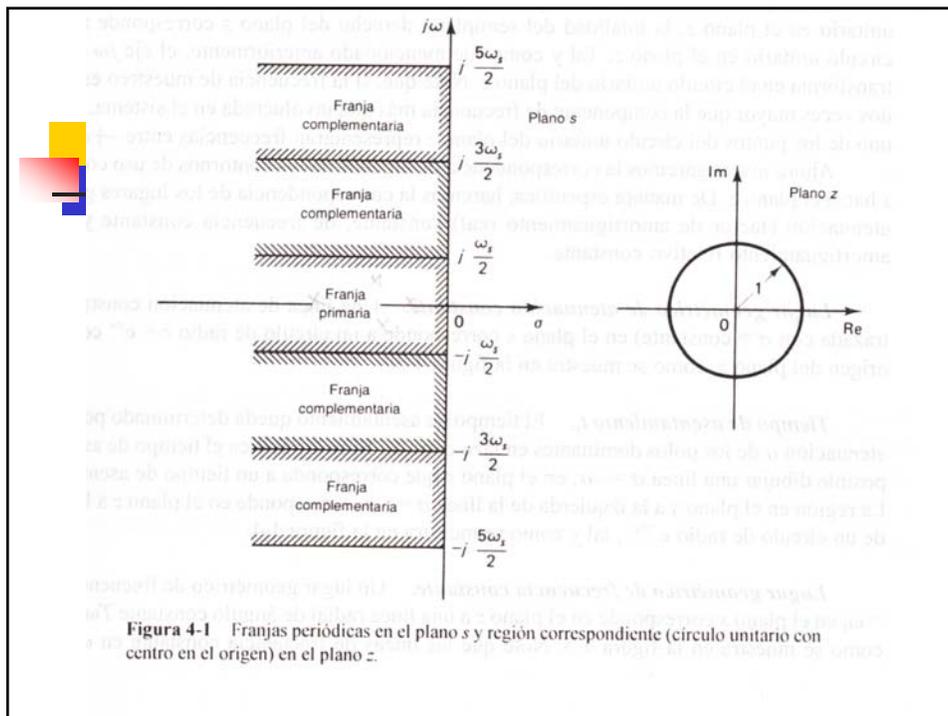
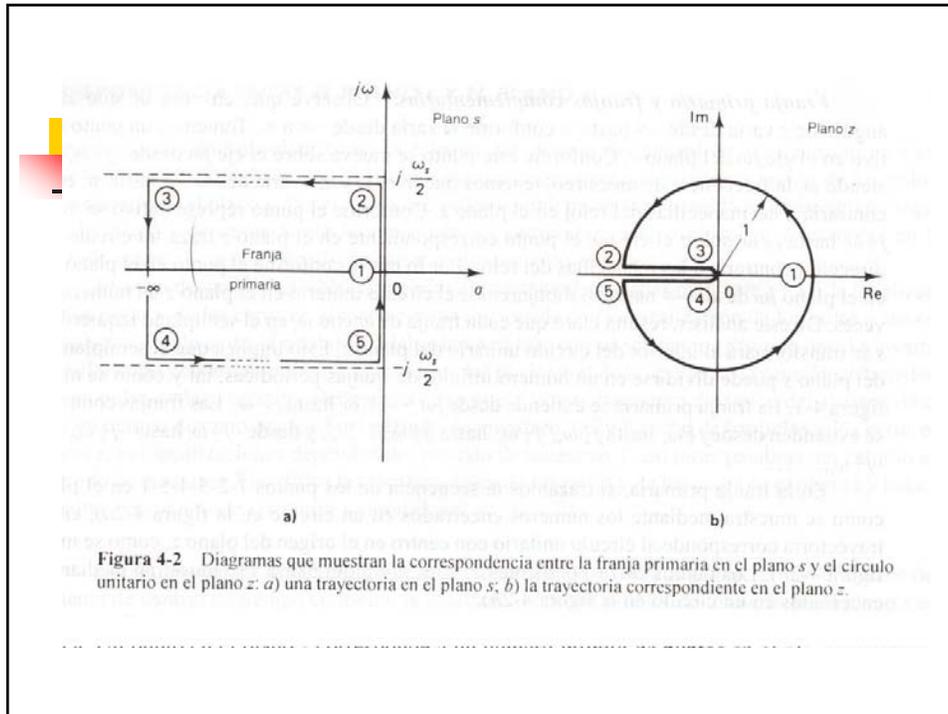


Figura 4-1 Franjas periódicas en el plano s y región correspondiente (círculo unitario con centro en el origen) en el plano z .



Tomar en cuenta:

Un punto en el plano z corresponde a infinitos puntos en el plano s . Un punto en el plano s corresponde a un solo punto en el plano z

Lugar geométrico de atenuación constante:

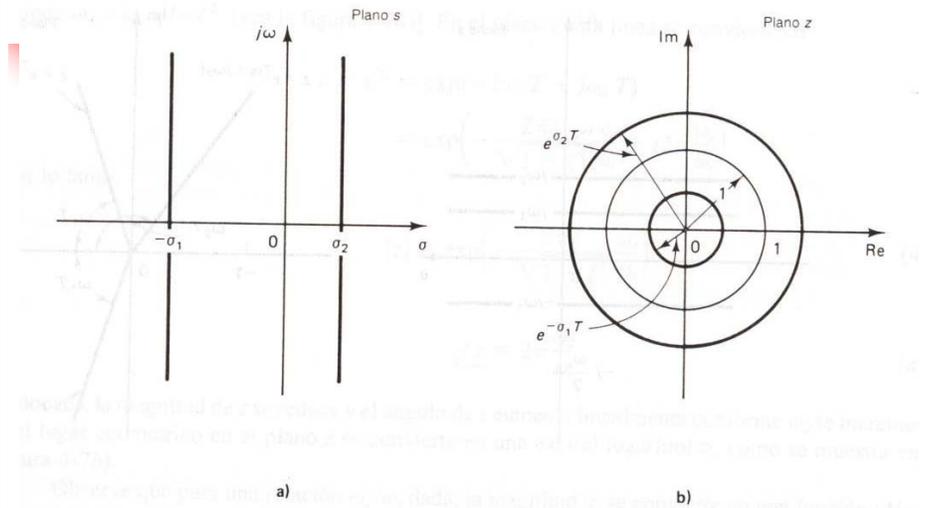


Figura 4-3 a) Líneas de atenuación constante en el plano s ; b) lugar geométrico correspondiente en el plano z .

Tiempo de establecimiento t_s :

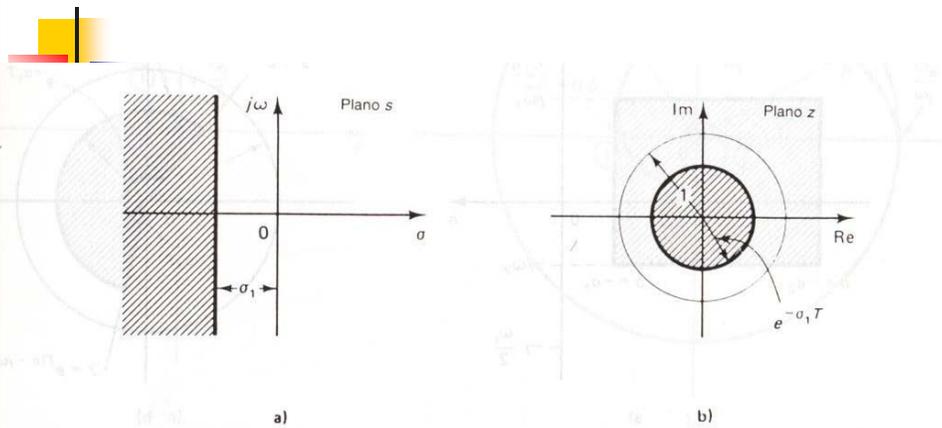
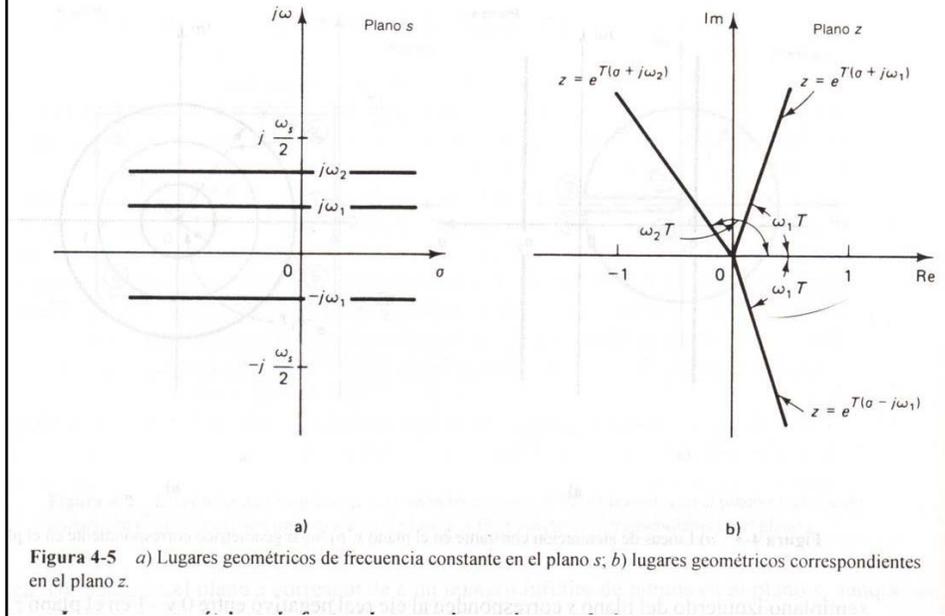


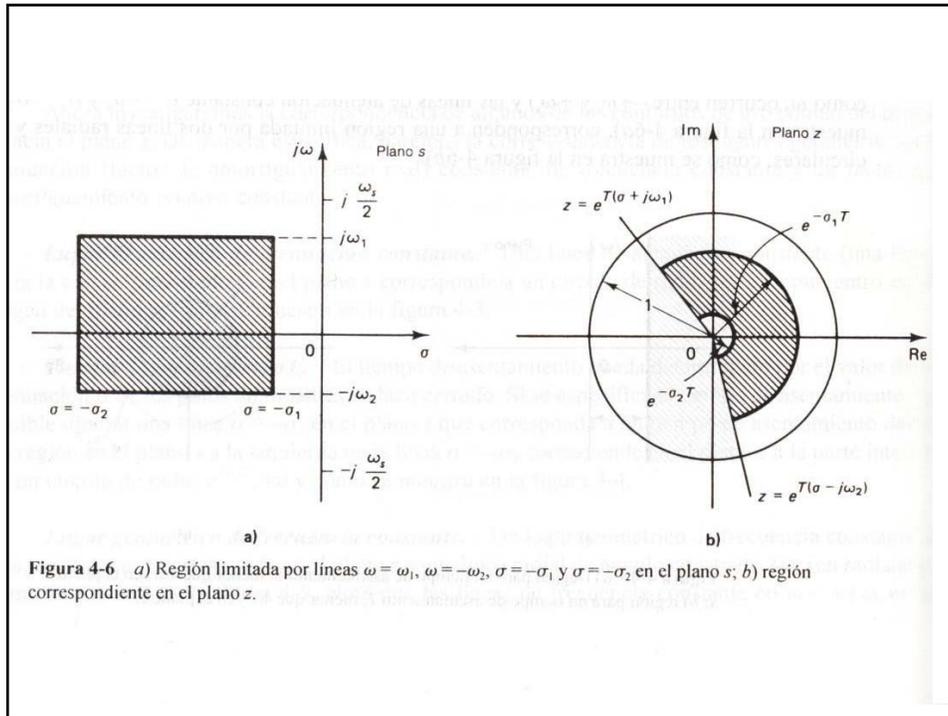
Figura 4-4 a) Región para un tiempo de asentamiento T , menor que $4/\sigma_1$ en el plano s ; b) región para un tiempo de asentamiento T , menor que $4/\sigma_1$ en el plano z .

Lugar geométrico de frecuencia constante:




Notar: las líneas de frecuencia constante $\omega = \pm \frac{1}{2} \omega_s$ en el SPI de s corresponden al eje real negativo del plano z entre 0 y -1 . Las líneas de frecuencia constante en $\omega = \pm \frac{1}{2} \omega_s$ en el SPD de s corresponden al eje real negativo del plano z entre 0 y 1.

La siguiente figura muestra una combinación de ambas:



Lugar geométrico de amortiguamiento constante:

Amortiguamiento constante en el plano s : línea radial, corresponde a una espiral en el plano z .

$$s = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n + j\omega_d$$

$$z = e^{Ts} = e^{T(-\xi\omega_n + j\omega_d)}$$

$$= e^{\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega_d}{\omega_s} + j2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s} \right)}$$

$$|z| = e^{\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega_d}{\omega_s} \right)} \quad \langle z = 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s} \rangle$$

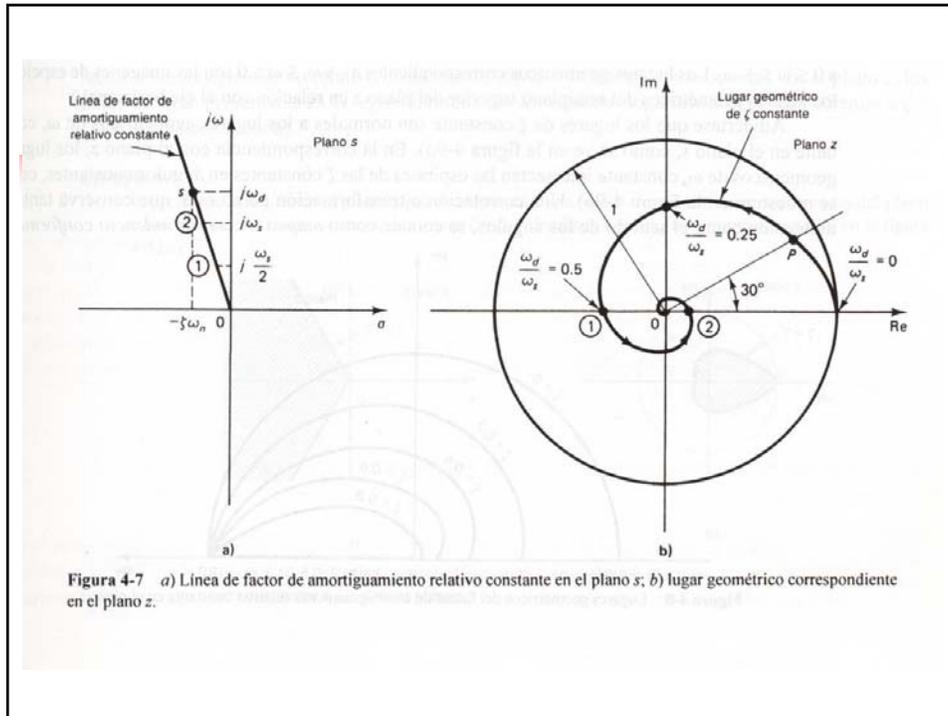


Figura 4-7 a) Línea de factor de amortiguamiento relativo constante en el plano s; b) lugar geométrico correspondiente en el plano z.

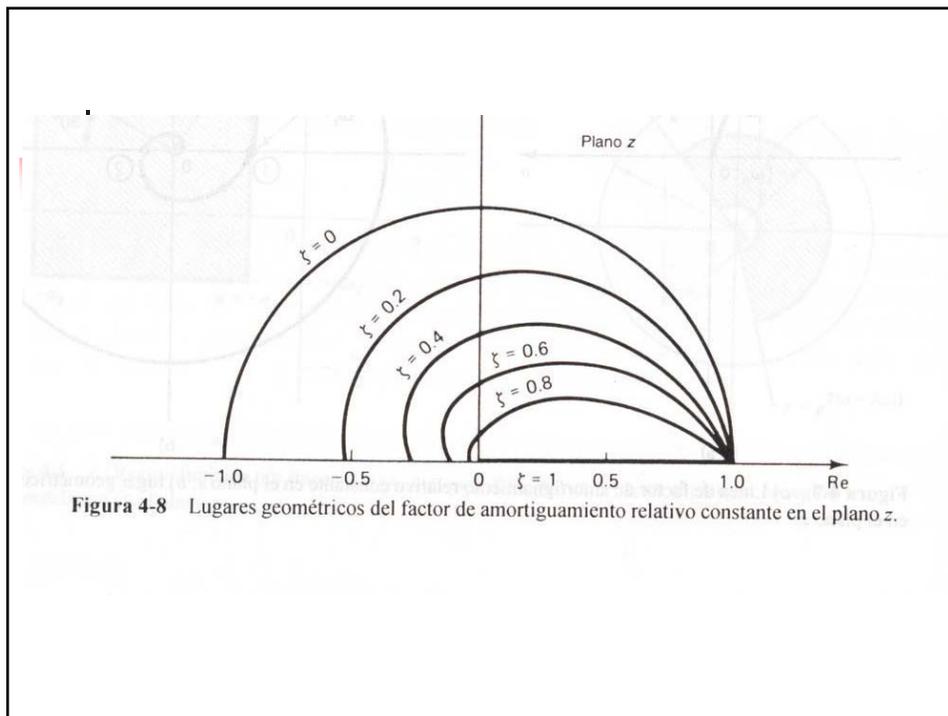


Figura 4-8 Lugares geométricos del factor de amortiguamiento relativo constante en el plano z.

En el plano s los lugares de ζ constante son perpendiculares a los de ω_n constante. En el plano z los lugares de ω_n constante intersectan a los lugares ζ constante con un ángulo constante.

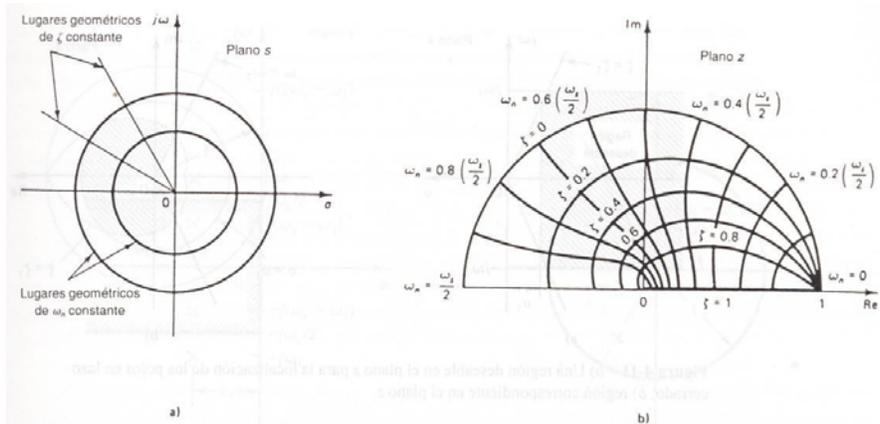


Figura 4-9 a) Diagrama que muestra la ortogonalidad o perpendicularidad de los lugares geométricos de las ζ constantes y de los lugares geométricos de los ω_n constantes dentro del plano s ; b) diagrama correspondiente en el plano z .

Región del plano s y del plano z para $\zeta > \zeta_1$

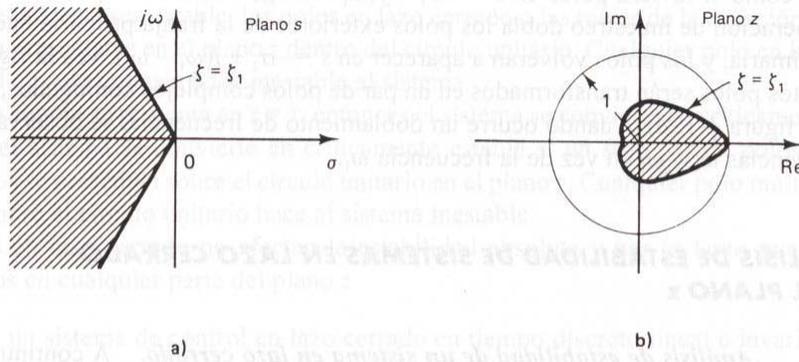


Figura 4-10 a) Región correspondiente a $\zeta > \zeta_1$ en el plano s; b) región correspondiente a $\zeta > \zeta_1$ en el plano z.

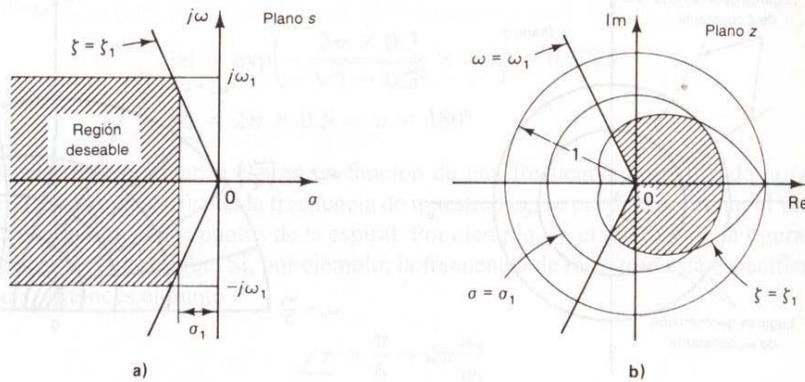


Figura 4-11 a) Una región deseable en el plano s para la localización de los polos en lazo cerrado; b) región correspondiente en el plano z.

Se debe tener cuidado en la elección de T , para cumplir el teorema del muestreo y evitar doblamiento de frecuencia

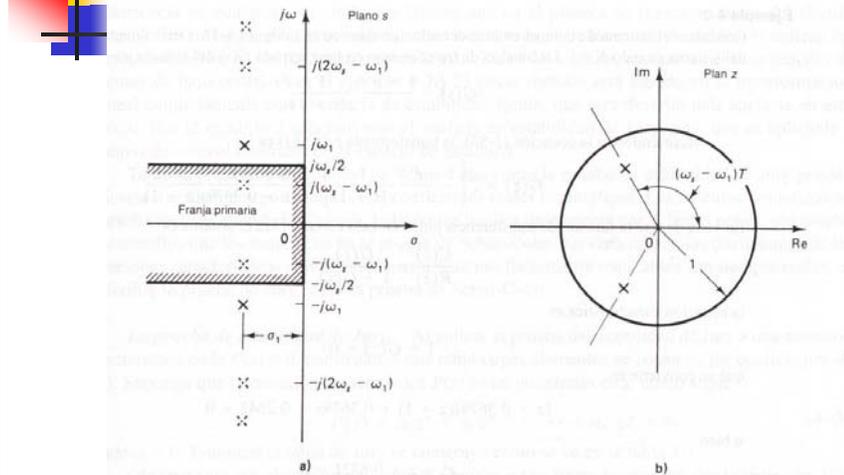


Figura 4-12 a) Diagrama que muestra los polos en el plano s en $-\sigma_1 \pm j\omega_1$ y los polos con doblamiento que aparecen en $-\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm \omega_s)$, $-\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm 2\omega_s)$, ... ; b) correspondencia en el plano z de los polos del plano s en $-\sigma_1 \pm j\omega_1$, $-\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm \omega_s)$, $-\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm 2\omega_s)$, ...

Análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado en el plano z .

La función de transferencia pulso de lazo cerrado:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

Los polos de lazo cerrado están dados por:

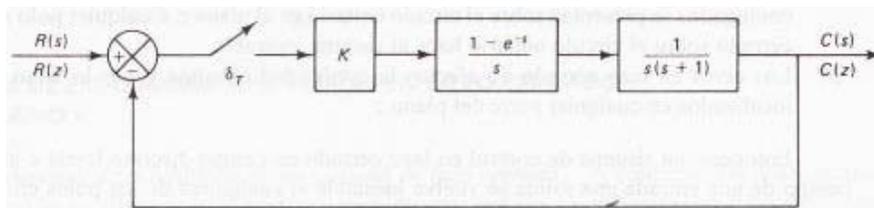
$$P(z) = 1 + GH(z) = 0$$

Condiciones de estabilidad en el plano z:

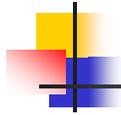
1. Sistema estable: polos de lazo cerrado dentro el círculo unitario.
2. Un polo simple en $z=-1$ o un sólo par de polos complejos conjugados sobre el círculo unitario, hacen el sistema críticamente estable.
3. Los ceros de lazo cerrado no afectan en la estabilidad (solamente en la respuesta transitoria).

EJEMPLO.

Para el sistema:



Determinar la estabilidad cuando $K=1$.

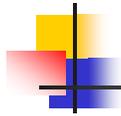


Métodos para probar la estabilidad absoluta: prueba de Jury

Ecuación característica:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

La tabla de Jury es:



No.	z^0	z^1	z^2	...	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...	c_0		
6	c_0	c_1	c_2	...	c_{n-2}		
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		
$2n-4$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n-3$	q_2	q_1	q_0				



$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

$$\vdots$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2$$

- 
1. $|a_n| < a_0$

 2. $P(z)|_{z=1} > 0$
 3. $P(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{para } n \text{ par} \\ < 0 & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$
 4. $|b_{n-1}| > |b_0|$
 $|c_{n-2}| > |c_0|$
 \vdots
 $|q_2| > |q_0|$

EJEMPLO.

Examinar la estabilidad de la ecuación característica:

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08$$

Factorizando se obtiene:

$$P(z) = (z - 0.8)(z + 0.5)(z - 0.5)(z - 0.4)$$

EJEMPLO.

Para el sistema con realimentación unitaria, cuya función de transferencia pulso de trayectoria directa, con $T=1$ seg., es:

$$G(z) = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{(z - 0.3679)(z - 1)}$$

Determinar el rango de valores de la ganancia K para la estabilidad.



Análisis de estabilidad mediante la transformación bilineal y el criterio de Routh.

El plano z se transforma en otro plano w . El cálculo requerido es mayor al criterio de Jury. La transformación es:

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad w = \frac{z+1}{z-1}$$

La transformación hace corresponder el interior del círculo unitario del plano z en el semiplano izquierdo de w .

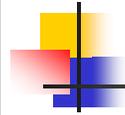

$$w = \sigma + j\omega$$

$$|z| = \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = \left| \frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma + j\omega - 1} \right| < 1$$

$$\frac{(\sigma+1)^2 + \omega^2}{(\sigma-1)^2 + \omega^2} < 1$$

$$(\sigma+1)^2 + \omega^2 < (\sigma-1)^2 + \omega^2 \Rightarrow \sigma < 0$$

De la ecuación característica:



$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Se obtiene:

$$a_0 \left(\frac{w+1}{w-1} \right)^n + a_1 \left(\frac{w+1}{w-1} \right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{w+1}{w-1} \right) + a_n = 0$$

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \dots + b_{n-1} w + b_n = 0$$

A esta ecuación se aplica el criterio de Routh.