

Solución Primer Examen Parcial

ELT 2642 - Sistemas de Control II

Semestre 2-2003

M.Sc.Ing. Ramiro Franz Aliendre García

30 de octubre de 2003

1. Primera Pregunta.

Se desea encontrar la señal digital (conversión A/D) de: $y = \text{sen}(2t) + 1$, con un periodo de muestreo de $T = 0,3$ seg., si el conversor acepta tensiones entre 0 y 2 voltios y utiliza un código BCD, cuáles son los valores de la señal digital para $0 \leq t \leq 2\pi$?. La resolución del conversor es de 8 bits.

Respuesta.

La siguiente figura muestra la señal discretizada:

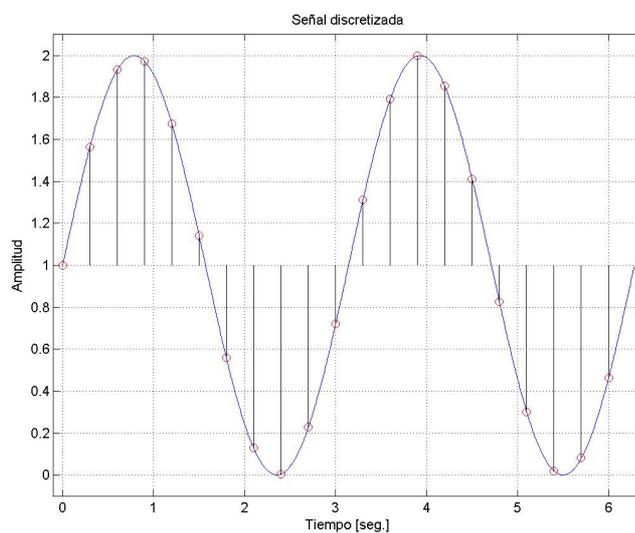


Figura 1: Señal continua y señal discretizada.

La función discretizada será:

$$y(kT) = \text{sen}(2kT) + 1 = \text{sen}(0,6k) + 1$$

De otro lado, el nivel de cuantificación para una longitud de palabra de 8 bits, con un valor de escala entre $0V$ y $2V$ será:

$$Q = \frac{FSR}{2^n} = \frac{2 - 0}{2^8} = 0,007813 \text{ [V]}$$

Los valores de la señal discretizada, de la señal cuantificada y de la palabra digital que representa cada valor cuantificado se muestra en el cuadro 1.

k	kT	$y(kT)$	Número de niv. de cuantificación	Señal cuantificada	Palabra digital en binario	Valor hexadecimal
0	0	1	128	1.0000	10000000	80
1	0.3	1.5646	200	1.5625	11001000	C8
2	0.6	1.9320	247	1.9297	11110111	F7
3	0.9	1.9738	252	1.9688	11111100	FC
4	1.2	1.6755	214	1.6719	11010110	D6
5	1.5	1.1411	146	1.1406	10010010	92
6	1.8	0.5575	71	0.5547	01000111	47
7	2.1	0.1284	16	0.1250	00010000	10
8	2.4	0.0038	0	0.0000	00000000	00
9	2.7	0.2272	29	0.2266	00011101	1D
10	3	0.7206	92	0.7188	01011100	5C
11	3.3	1.3115	167	1.3047	10100111	A7
12	3.6	1.7937	229	1.7891	11100101	E5
13	3.9	1.9985	255	1.9922	11111111	FF
14	4.2	1.8546	237	1.8516	11101101	ED
15	4.5	1.4121	180	1.4063	10110100	B4
16	4.8	0.8257	105	0.8203	01101001	69
17	5.1	0.3001	38	0.2969	00100110	26
18	5.4	0.0191	2	0.0156	00000010	02
19	5.7	0.0807	10	0.0781	00001010	0A
20	6	0.4634	59	0.4609	00111011	3B

Cuadro 1: Valores de la señal cuantificada.

2. Segunda Pregunta.

Hallar la transformada z inversa de:

$$F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2-z+1)}$$

mediante:

- Fórmula de inversión.
- División directa.
- Fracciones parciales.

utilizando el método vectorial cuando sea necesario.

Respuesta.

Método de la integral de inversión.

Los ceros de $F(z)$ son: $z_1 = 0$; $z_2 = -1$, y los polos son: $p_1 = 1$; $p_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$; $p_3 = p_2^* = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Para aplicar el método, es necesario calcular:

$$F(z)z^{k-1} = \frac{(z+1)z^k}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Por tanto, calculando los residuos:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+1)z^k}{z^2 - z + 1} = \frac{2(1)^k}{1 - 1 + 1} = 2 \\ K_2 &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(z+1)z^k}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(j\sqrt{3})} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k = \frac{\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}}{\left(1e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{2}}\right)} \left(1e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^k \\ &= e^{-j\pi} \left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^k = e^{j\left(\frac{\pi}{3}k - \pi\right)} \\ K_3 &= K_2^* = e^{-j\left(\frac{\pi}{3}k - \pi\right)} \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} F(z) &= K_1 + K_2 + K_3 \\ &= 2 + e^{j\left(\frac{\pi}{3}k - \pi\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{3}k - \pi\right)} \\ F(z) &= 2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \pi\right) = 2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) \end{aligned}$$

Método de la división directa.

Desarrollando numerador y denominador $F(z)$ puede ser expresada como:

$$F(z) = \frac{z^2 + z}{z^3 - 2z^2 + 2z - 1} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}}$$

luego, realizando la división:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} z^{-1} & +z^{-2} & & \\ -z^{-1} & +2z^{-2} & -2z^{-3} & +z^{-4} \\ \hline & +3z^{-2} & -2z^{-3} & +z^{-4} \\ & -3z^{-2} & +6z^{-3} & -6z^{-4} & +3z^{-5} \\ \hline & & 4z^{-3} & -5z^{-4} & +3z^{-5} \\ & & -4z^{-3} & +8z^{-4} & -8z^{-5} & +4z^{-6} \\ \hline & & & 3z^{-4} & -5z^{-5} & +4z^{-6} \\ & & & -3z^{-4} & +6z^{-5} & -6z^{-6} & +3z^{-7} \\ \hline & & & & z^{-5} & -2z^{-6} & +3z^{-7} \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} & \left| \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}}{z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-5} + \dots} \right. \end{array}$$

por tanto:

$$F(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-5} + \dots$$

De aquí se deduce:

$$f(0) = 0; f(1) = 1; f(2) = 3; f(3) = 4; f(4) = 3; f(5) = 1; \dots$$

Método de la descomposición en fracciones parciales.

Para poder realizar la descomposición en fracciones parciales, conociendo que los ceros y polos de $\frac{F(z)}{z}$ son: $z_1 = -1$, $p_1 = 1$; $p_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $p_3 = p_2^* = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$, se obtiene:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

luego:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{k_1}{z-1} + \frac{k_2}{z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{k_3}{z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

El cálculo de k_1 , k_2 , y k_3 se realiza mediante el método vectorial.

Para k_1 : el diagrama vectorial se muestra en la figura 2.

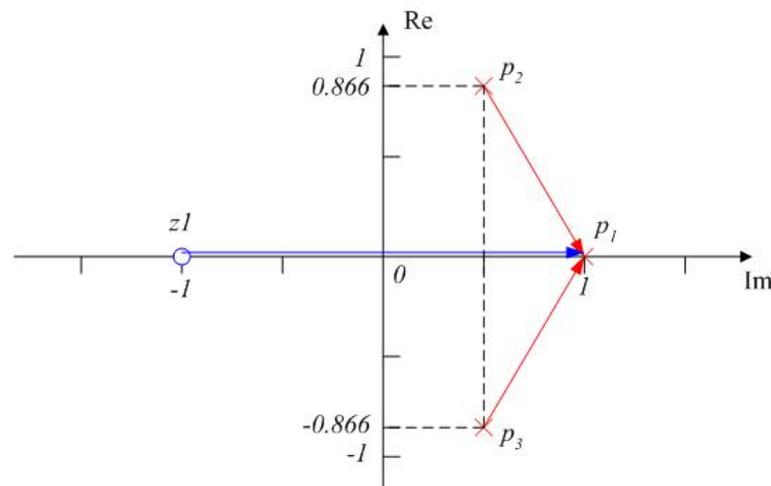


Figura 2: Diagrama vectorial para el cálculo de k_1 .

$$k_1 = \frac{2 \angle 0}{1 \angle -\frac{\pi}{3} * 1 \angle \frac{\pi}{3}} = 2 \angle 0$$

Para k_2 : el diagrama vectorial se muestra en la figura 3.

$$k_2 = \frac{\sqrt{3} \angle \frac{\pi}{6}}{\sqrt{3} \angle \frac{\pi}{2} * 1 \angle \frac{2\pi}{3}} = 1 \angle -\pi = -1$$

Para k_3 : como k_3 es k_2^* , entonces:

$$k_3 = -1$$

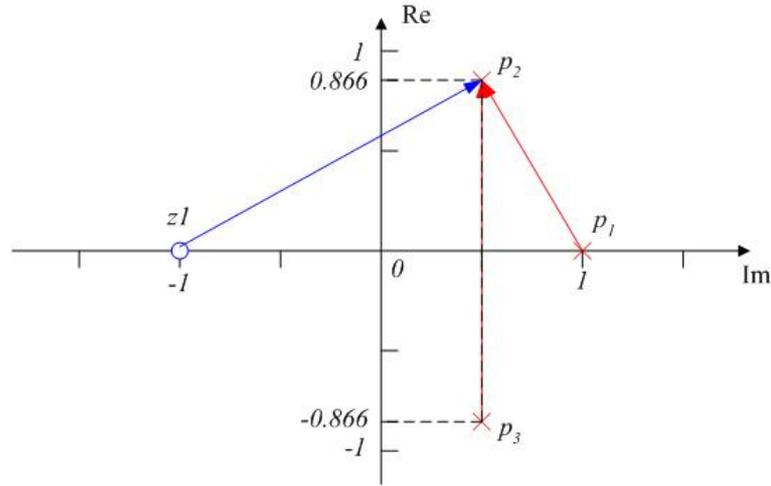


Figura 3: Diagrama vectorial para el cálculo de k_2 .

Por tanto:

$$F(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Luego:

$$\begin{aligned} f(k) &= 2 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \\ &= 2 - (1 * e^{j\frac{\pi}{3}})^k - (1 * e^{-j\frac{\pi}{3}})^k = 2 - (e^{j\frac{\pi}{3}k} + e^{-j\frac{\pi}{3}k}) \\ f(k) &= 2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) \end{aligned}$$

Las respuestas obtenidas por los tres métodos son exactamente los mismos. Una gráfica se muestra en la figura 4.

3. Tercera Pregunta.

Hallar la forma canónica controlable y la forma canónica controlable de la función de transferencia de la pregunta anterior.

Respuesta.

La función de transferencia de la pregunta anterior, en forma desarrollada es:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{z^2 + z}{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}$$

haciendo:

$$V(z) = \frac{U(z)}{z^3 - 2z^2 + 2z - 1} \quad (1)$$

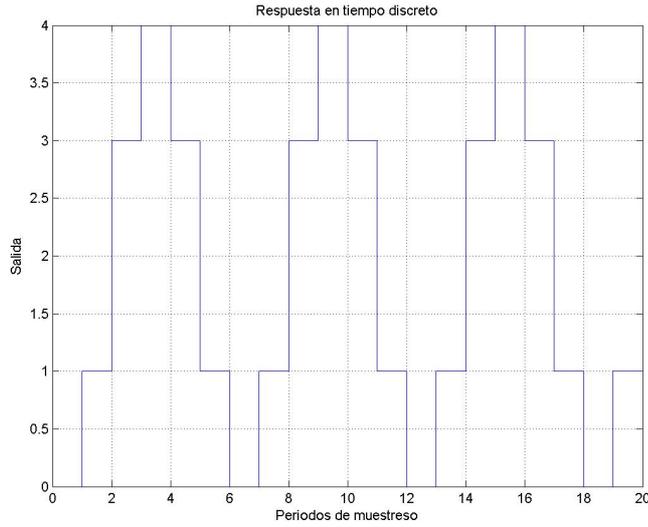


Figura 4: Respuesta en tiempo discreto del sistema.

se tiene:

$$Y(z) = (z^2 + z) V(z) \quad (2)$$

De la ecuación (1), se deduce:

$$\begin{aligned} U(z) &= (z^3 - 2z^2 + 2z - 1) V(z) \\ u(k) &= v(k+3) - 2v(k+2) + 2v(k+1) - v(k) \end{aligned}$$

suponiendo todas las condiciones iniciales cero, también:

$$v(k+3) = u(k) + 2v(k+2) - 2v(k+1) + v(k) \quad (3)$$

Haciendo:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= v(k) \\ x_2(k) &= v(k+1) \\ x_3(k) &= v(k+2) \end{aligned}$$

de aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \end{aligned} \quad (4)$$

por tanto, la ecuación (3) será:

$$v(k+3) = x_3(k+1) = u(k) + 2x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) \quad (5)$$

De otro lado, de la ecuación (2) se obtiene:

$$y(k) = v(k+2) + v(k+1)$$

que expresada utilizando las ecuaciones (4), es:

$$y(k) = x_3(k) + x_2(k) \quad (6)$$

Ordenando las ecuaciones (4), (5), y (6), se obtiene:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_2(k) \\x_2(k+1) &= x_3(k) \\x_3(k+1) &= x_1(k) - 2x_2(k) + 2x_3(k) + u(k) \\y(k) &= x_2(k) + x_3(k)\end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores se deduce la forma canónica controlable:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\y(k) &= (0 \ 1 \ 1) \mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

La forma canónica observable, deducida a partir de la forma anterior es:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\y(k) &= (0 \ 0 \ 1) \mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$